

Kollineationen,
durch welche fünf gegebene Punkte
des Raumes in dieselben fünf Punkte
transformiert werden.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
bei der
hohen philosophischen Fakultät
der Königlichen Akademie zu Münster
öffentlich verteidigt
am 23. Dezember 1890, 11 Uhr vormittags,
von
Heinrich Küppers
aus Kaldenkirchen.

Bonn,
Universitäts-Buchdruckerei von Carl Georgi.
1890.

Seinem verehrten Lehrer

Herrn Prof. Dr. Rudolf Sturm

aus Dankbarkeit und Hochachtung gewidmet

vom

Verfasser.

Einleitung.

Durch 5 Paare entsprechender Punkte ist bekanntlich eine räumliche Kollineation festgelegt. Lässt man nun 5 gegebenen Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , von denen keine 4 in einer Ebene liegen, dieselben Punkte in anderer Reihenfolge bezüglich entsprechen, so liefert jede der 120 möglichen Permutationen eine Kollineation. Diese Kollineationen sind jedoch nicht alle wesentlich verschieden.

In der Substitutionentheorie wird gezeigt, dass man jede Substitution in eine Anzahl von Cyklen zerlegen kann. Nach der Anzahl und Ordnung der Cyklen zerfallen die sämtlichen Permutationen von n Elementen in verschiedene Klassen, z. B. bei 5 Elementen in 7 Klassen. Die Anzahlen und Ordnungen der Cyklen in diesen Klassen sind folgende: 1) 5 Cyklen 1. Ordnung, 2) 1 Cyklus 2. Ordnung und 3 Cyklen 1. Ordnung, 3) 2 Cyklen 2. Ordnung und 1 Cyklus 1. Ordnung, 4) 1 Cyklus 3. Ordnung und 2 Cyklen 1. Ordnung, 5) 1 Cyklus 3. Ordnung und 1 Cyklus 2. Ordnung, 6) 1 Cyklus 4. Ordnung und 1 Cyklus 1. Ordnung, 7) 1 Cyklus 5. Ordnung.

Alle die Kollineationen, welche sich nun in der oben angegebenen Weise aus Permutationen derselben Klasse ergeben, sind dem Wesen nach von derselben Art. Es genügt daher, die 7 wesentlich verschiedenen Kollineationen zu betrachten, welche wir aus den 7 Permutationsklassen erhalten. Wir bezeichnen die einzelnen Kollineationen nach Cyklen, indem wir diejenigen von den 5 gegebenen Punk-

ten, welche cyklisch in einander übergehen sollen, jedesmal in einer Klammer zusammenstellen, so dass z. B.

$$T = (A_1 A_2 A_3) (A_4) (A_5)$$

die Kollineation bedeutet, für welche (A_1, A_2) , (A_2, A_3) , (A_3, A_1) , (A_4, A_4) , (A_5, A_5) die bestimmenden Paare entsprechender Punkte sind. Demnach haben wir folgende Fälle zu behandeln:

1. $T_1 = (A_1) (A_2) (A_3) (A_4) (A_5)$,
2. $T_2 = (A_1) (A_2) (A_3) (A_4 A_5)$,
3. $T_3 = (A_1 A_2) (A_3 A_4) (A_5)$,
4. $T_4 = (A_1 A_2 A_3) (A_4) (A_5)$,
5. $T_5 = (A_1 A_2 A_3) (A_4 A_5)$,
6. $T_6 = (A_1 A_2 A_3 A_4) (A_5)$,
7. $T_7 = (A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)$.

Die Transformation T_1 lässt die 5 gegebenen Punkte, und also alle Elemente des Raumes ungeändert; dieselbe bietet daher wenig Interesse.

Wir setzen fest, dass der Punkt, welcher aus einem Punkt X_i durch die gerade betrachtete Transformation hervorgeht, im allgemeinen durch X_{i+1} bezeichnet werden soll, so dass also ein Punkt X_1 durch wiederholte Anwendung der Transformation nach und nach in $X_2, X_3 \dots$ übergeführt wird. Ähnliches gilt von der Bezeichnung der Geraden, Ebenen, Kurven und Flächen. Auf die 5 gegebenen Punkte findet diese Regel keine Anwendung. Elemente, welche in sich selbst transformiert werden, sind durch Buchstaben ohne Zeiger benannt.

Bevor wir auf die einzelnen Fälle näher eingehen, wollen wir, um bequemer citieren zu können, eine Reihe von meist mehrfach benutzten Sätzen vorausschicken, die zum Teil ohne Beweis angeführt werden sollen.

Hilfssätze.

1. Sind 2 konjektive Punktreihen, d. h. projektive Punktreihen auf demselben Träger, gegeben, und geht man

von einem Punkt X_1 der ersten aus, konstruiert dessen entsprechenden X_2 in der zweiten Punktreihe, fasst diesen dann als Punkt der ersten Reihe auf und sucht seinen entsprechenden X_3 in der zweiten Reihe u. s. w., so kann es vorkommen, dass eine n -malige Wiederholung dieser Operation zu dem Ausgangspunkte X_1 zurückführt, so dass also

$$X_{n+1} \equiv X_1$$

ist. Findet dies einmal statt, so trifft es immer nach n -maligem Fortschreiten ein, von welchem Punkte man auch ausgehen mag¹⁾).

Zwei derartige Punktreihen nennt man cyklisch projektiv, oder das System derselben mit Herrn Lüroth eine cyklische Involution n -ter Ordnung. Ist $n=2$, so ergibt sich der Fall der gemeinen Involution. Die n Punkte, welche man, von irgend einem Punkte des Trägers ausgehend, nach und nach erhält, bezeichnet man ferner als die Punkte einer Gruppe oder eines Cyklus.

2. Jede Gruppe einer cyklischen Punktinvolution n -ter Ordnung besteht aus n Punkten; wenn man also von einem Punkte X_1 ausgeht, so ist der Punkt X_{n+1} der erste, welcher mit X_1 übereinstimmt.

Nehmen wir nämlich an, es wäre bereits

$$X_{\nu+1} \equiv X_1,$$

wobei $\nu < n$ ist, so hätten wir es nach dem vorigen Satze mit einer cyklischen Involution ν -ter Ordnung zu thun, was der Voraussetzung widerspricht²⁾).

1) J. Lüroth, Math. Ann., Bd. 11, S. 91; H. Reim, „Wie müssen zwei projektivische Punktfelder auf einander gelegt werden, damit entsprechende kongruente Polygone cyklisch zusammenfallen?“ Dissertation, Breslau, 1879, S. 6; vergl. auch A. Ameseder, Sitz.-Ber. d. kais. Akad. d. Wissenschaften in Wien, Math.-naturw. Klasse, Bd. 98, Abt. 2a, S. 301.

2) Vergl. J. Lüroth, a. a. O. S. 91 f.; A. Ameseder, a. a. O., S. 302.)

3. Eine cyklische Involution n -ter Ordnung hat, wenn $n > 2$ ist, immer 2 konjugiert imaginäre Doppelpunkte.

Denken wir uns zum Beweise dieses Satzes zunächst 2 konjektive Punktreihen mit den Doppelpunkten O und P , die reell oder konjugiert imaginär sein können, und seien (X_1, X_2) und (Y_1, Y_2) irgend 2 Paare entsprechender Punkte, so ist bekanntlich

$$(X_1 Y_1 O P) = (X_2 Y_2 O P).$$

Daraus ergibt sich

$$(X_1 X_2 O P) = (Y_1 Y_2 O P).$$

Da dieses Doppelverhältnis für 2 beliebige Paare entsprechender Punkte der konjektiven Punktreihen denselben Wert hat, so ist es für alle Paare konstant:

$$(X_1 X_2 O P) = \lambda.$$

Bilden die konjektiven Punktreihen nun eine cyklische Involution n -ter Ordnung, so ist

$$\lambda = (X_1 X_2 O P),$$

$$\lambda = (X_2 X_3 O P),$$

$$\vdots$$

$$\lambda = (X_n X_1 O P).$$

Durch Multiplikation dieser n Gleichungen erhalten wir

$$\lambda^n = +1.$$

Weil X_{n+1} der erste Punkt in der Reihe $X_2, X_3 \dots$ ist, welcher mit X_1 zusammenfällt, so kann keine niedrigere Potenz von λ , als die n -te, der Einheit gleich sein, d. h. λ ist eine primitive n -te Einheitswurzel. Da weiter alle primitiven n -ten Einheitswurzeln, wenn $n > 2$ ist, imaginär sind, so gilt dies auch für λ . Das Doppelverhältnis $(X_1 X_2 O P)$ kann jedoch, da X_1 und X_2 reelle Punkte sind, nur dann einen imaginären Wert besitzen, wenn mindestens einer der Punkte O und P imaginär ist. Dann muss aber der andere der konjugiert imaginäre Punkt sein¹⁾.

1) Vergl. J. Lüroth, a. a. O. S. 90; H. Reim, a. a. O. S. 7; A. Ameseder, a. a. O., S. 303. Letzterer ermittelt die elliptische Involution, welche die Doppelpunkte repräsentirt.

Aus dem Satze 3 folgt unmittelbar:

4. Wenn 2 cyklisch projektive Punktreihen einen reellen Doppelpunkt haben, so ist der Cyklus entweder von der Ordnung 1 oder 2, d. h. die Punktreihen sind entweder identisch oder involutorisch.

Die bisher angeführten Sätze übertragen sich selbstverständlich auch auf alle konjektiven, d. h. projektiv auf sich selbst bezogenen, einstufigen Gebilde, z. B. Büschel von Flächen, krumme Punktreihen auf einer rationalen Kurve u. s. w.

5. Wenn 2 kollineare Felder so auf einander liegen, dass durch n -malige Anwendung der kollinearen Transformation ein nicht auf einer Doppelgeraden (d. h. sich selbst entsprechenden Geraden) liegender Punkt in sich selbst übergeführt wird, so wird jeder Punkt durch n -malige Anwendung der Transformation in sich selbst verwandelt¹⁾.

Zwei in dieser Weise auf einanderfallende kollineare Felder bezeichnet man als cyklisch kollinear, oder man spricht in den einzelnen Fällen von kollinearen Feldern in Tripel- oder Dreieckslage, in Quadrupel- oder Viereckslage u. s. w., je nach der Ordnung des Cyklus. Ähnliche Benennungen gelten für kollineare Bündel derselben Specialität.

6. Zwei cyklisch kollineare Felder haben nur einen reellen Doppelpunkt und eine nicht durch denselben gehende reelle Doppelgerade. Die übrigen Doppelpunkte sowie die übrigen Doppelgeraden sind bezüglich konjugiert imaginär²⁾.

7. In 2 cyklisch kollinearen Feldern liegen die Punkte jeder Gruppe auf einem Kegelschnitt, welcher die

1) J. Lüroth, Math. Annalen, Bd. 13, S. 309; H. Reim, a. a. O., S. 13; H. Schröter, Oberflächen 2. Ordnung und Raumkurven 3. Ordnung, S. 410 f.

2) J. Lüroth, a. z. a. O. S. 306; H. Reim, a. a. O., S. 14; für die Tripellage s. auch H. Schröter, a. a. O. S. 410.

imaginären Doppelgeraden in den imaginären Doppelpunkten berührt. Alle diese Kegelschnitte bilden zugleich einen Büschel und eine Schar, und jeder derselben entspricht sich selbst¹⁾.

8. Bei 2 kollinearen Feldern in n -eckslage gehen alle Verbindungslinien zweier Punkte einer Gruppe, für welche die Summe der Zeiger einer gegebenen Zahl kongruent ist nach dem Modul n , durch einen Punkt der reellen Doppelgeraden; dabei ist unter der Verbindungslinie eines Punktes mit sich selbst die Tangente an den durch ihn gehenden Kegelschnitt des im vorigen Satz beschriebenen Büschels zu verstehen²⁾.

9. Jedes der Doppelverhältnisse, welche auf allen Verbindungslinien entsprechender Punkte X_1 und X_2 einer räumlichen Kollineation durch diese Punkte und die Schnitte mit je zweien der 4 Ebenen des Haupttetraeders $OPRS$ gebildet werden, hat einen konstanten Wert. Seien $\omega = PRS$, $\pi = RSO$, $\varrho = SOP$, $\sigma = OPR$ diese 4 Ebenen und $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ ihre Schnitte mit der Geraden X_1X_2 , so sind 3 Invarianten, wie

$$\lambda_{\omega\pi} = (X_1X_2\mathfrak{O}\mathfrak{P}), \quad \lambda_{\omega\varrho} = (X_1X_2\mathfrak{O}\mathfrak{R}), \quad \lambda_{\omega\sigma} = (X_1X_2\mathfrak{O}\mathfrak{S})$$

von einander unabhängig; die 3 übrigen sind

$$\lambda_{\pi\varrho} = \lambda_{\omega\varrho} : \lambda_{\omega\pi}, \quad \lambda_{\varrho\sigma} = \lambda_{\omega\sigma} : \lambda_{\omega\varrho}, \quad \lambda_{\sigma\pi} = \lambda_{\omega\pi} : \lambda_{\omega\sigma}.$$

Analoge Gleichungen gelten für alle Gruppen von 3 Invarianten, welche sich auf 3 in derselben Ebene des Haupttetraeders liegende Kanten desselben beziehen.

Zwei Invarianten, deren Bezeichnung sich durch die Reihenfolge der Zeiger unterscheidet, sind zu einander reciprok, z. B.

$$\lambda_{\pi\omega} = \frac{1}{\lambda_{\omega\pi}} \quad ^3).$$

1) J. Lüroth, a. z. a. O., S. 312; H. Reim, a. a. O. S. 18.

2) J. Lüroth, Math. Ann., Bd. 11, S. 97 ff.; H. Reim, a. a. O., S. 19 ff.

3) R. Sturm, Math. Ann., Bd. 26, S. 470.

Bei der Transformation T_1 , welche alle Punkte des Raumes ungeändert lässt, können wir jedes beliebige Tetraeder als Haupttetraeder auffassen. Alle Invarianten λ derselben haben offenbar den Wert $+1$.

10. Sind mehrere Kollineationen $T', T'', \dots T^{(n)}$ gegeben, welche alle dasselbe Haupttetraeder $OPRS$ besitzen, und möge die erste einen Punkt X in X' , die zweite den Punkt X' in X'' u. s. w., schliesslich die letzte den Punkt $X^{(n-1)}$ in $X^{(n)}$ verwandeln, so erhalten wir eine Kollineation T , welche dasselbe Haupttetraeder hat und den Punkt X in $X^{(n)}$ transformiert. Die Invarianten λ der Kollineation T sind den Produkten der entsprechenden Invarianten $\lambda', \lambda'', \dots \lambda^{(n)}$ der einzelnen Kollineationen $T', T'', \dots T^{(n)}$ gleich.

Um dies z. B. für die Invariante $\lambda_{\omega\pi} = (XX^{(n)}\mathfrak{D}\mathfrak{P})$ zu beweisen, projicieren wir die Punkte $X, X', \dots X^{(n)}$ aus der Geraden RS . Bezeichnen wir dann die Schnittpunkte der Linien $XX', X'X'', \dots X^{(n-1)}X^{(n)}$ mit den Ebenen ω und π bezüglich durch $\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'', \dots \mathfrak{D}^{(n)}$ und $\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \dots \mathfrak{P}^{(n)}$, so ist

$$\lambda'_{\omega\pi} = RS(X X' \mathfrak{D}' \mathfrak{P}') = RS(X X' PO),$$

$$\lambda''_{\omega\pi} = RS(X' X'' \mathfrak{D}'' \mathfrak{P}'') = RS(X' X'' PO),$$

$$\vdots$$

$$\lambda^{(n)}_{\omega\pi} = RS(X^{(n-1)} X^{(n)} \mathfrak{D}^{(n)} \mathfrak{P}^{(n)}) = RS(X^{(n-1)} X^{(n)} PO).$$

Durch Multiplikation dieser n Gleichungen bekommen wir

$$\lambda'_{\omega\pi} \cdot \lambda''_{\omega\pi} \dots \lambda^{(n)}_{\omega\pi} = RS(XX^{(n)}PO) = RS(XX^{(n)}\mathfrak{D}\mathfrak{P}) = \lambda_{\omega\pi}.$$

Auf grund dieses Satzes kann man die Transformation T als das Produkt der Transformationen $T', T'' \dots T^{(n)}$ bezeichnen:

$$T = T' \cdot T'' \dots T^{(n)}.$$

In gleichem Sinne werden wir von Potenzen einer kollinearen Transformation reden.

11. Bekanntlich hat auch das Doppelverhältnis $\mathcal{A} = (\mathfrak{D}\mathfrak{P}\mathfrak{R}\mathfrak{S})$ auf allen Verbindungslinien entsprechender

Punkte bei jeder Kollineation einen konstanten Wert¹⁾. Derselbe ergibt sich aus den Werten der Invarianten λ durch die Formel

$$\lambda = \frac{1 - \lambda_{\omega\rho}}{1 - \lambda_{\omega\sigma}} : \frac{1 - \lambda_{\pi\rho}}{1 - \lambda_{\pi\sigma}},$$

Es ist nämlich:

$$\frac{X_1 X_2}{X_1 \mathfrak{R}} : \frac{\mathfrak{D} X_2}{\mathfrak{D} \mathfrak{R}} = (X_1 \mathfrak{D} X_2 \mathfrak{R}) = 1 - (X_1 X_2 \mathfrak{D} \mathfrak{R}) = 1 - \lambda_{\omega\rho},$$

$$\frac{\mathfrak{D} X_2}{\mathfrak{D} \mathfrak{S}} : \frac{X_1 X_2}{X_1 \mathfrak{S}} = (\mathfrak{D} X_1 X_2 \mathfrak{S}) = \frac{1}{1 - (X_1 X_2 \mathfrak{D} \mathfrak{S})} = \frac{1}{1 - \lambda_{\omega\sigma}},$$

$$\frac{\mathfrak{P} X_2}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}} : \frac{X_1 X_2}{X_1 \mathfrak{R}} = (\mathfrak{P} X_1 X_2 \mathfrak{R}) = \frac{1}{1 - (X_1 X_2 \mathfrak{P} \mathfrak{R})} = \frac{1}{1 - \lambda_{\pi\rho}},$$

$$\frac{X_1 X_2}{X_1 \mathfrak{S}} : \frac{\mathfrak{P} X_2}{\mathfrak{P} \mathfrak{S}} = (X_1 \mathfrak{P} X_2 \mathfrak{S}) = 1 - (X_1 X_2 \mathfrak{P} \mathfrak{S}) = 1 - \lambda_{\pi\sigma}.$$

Multiplizieren wir diese 4 Gleichungen, so gelangen wir zur Behauptung

$$(\mathfrak{D} \mathfrak{P} \mathfrak{R} \mathfrak{S}) = \frac{1 - \lambda_{\omega\rho}}{1 - \lambda_{\omega\sigma}} : \frac{1 - \lambda_{\pi\rho}}{1 - \lambda_{\pi\sigma}}.$$

12. Besitzt eine räumliche Kollineation T die Eigenschaft, dass eine n -malige Anwendung derselben 5 Punkte, von denen keine 4 in einer Ebene liegen, und daher alle Elemente des Raumes unverändert lässt, dass also

$$T^n = T_1$$

ist, so bezeichnet man sie als eine cyklische Kollineation, oder man sagt bei speciellen Werten von n , die kollinearen Räume befinden sich in Dreiecks- oder Tripellage, in Vierecks- oder Quadrupellage u. s. w. Die Punkte des Raumes gruppieren sich dann zu je n , welche durch die wiederholten Anwendungen der Transformation T aus einem derselben entstehen; dasselbe gilt von den Geraden, Ebenen und von allen Gebilden des Raumes. Jede Gruppe von n Punkten oder Geraden oder Ebenen u. s. w., welche sich in dieser Weise ergibt, nennt man einen Cyklus oder in den einzelnen Fällen, je nach dem Werte von n , ein Tripel,

1) Th. Reye, Geometrie der Lage, Abt. II, S. 138.

ein Quadrupel . . . von Punkten oder Geraden oder Ebenen u. s. w.

Da insbesondere die Ebenen des Raumes Cyklen von derselben Ordnung bilden, wie die Punkte, so sind alle von uns zu betrachtenden Kollineationen in sich dual, d. h. jede derselben besitzt alle dualisierbaren Eigenschaften, welche ihr zukommen, auch in der dualen Form.

Berücksichtigen wir die in der Einleitung gemachten Festsetzungen über die Bezeichnung entsprechender Elemente, so ist klar, dass 2 Elemente einer Gruppe, deren Zeiger sich um ein Vielfaches von n unterscheiden, identisch sind, z. B.

$$X_{i+zn} \equiv X_i.$$

Unmittelbar erkennen wir:

13. Wenn bei ausgezeichneten Elementen einer cyklischen Kollineation der Cyklus von geringerer, als der n -ten Ordnung ist, etwa von der Ordnung ν , so muss ν ein Teiler von n sein.

14. Eine räumliche Kollineation T sei dadurch bestimmt, dass 5 gegebenen Punkten dieselben Punkte in anderer Substitution entsprechen sollen; besteht diese Substitution aus Cyklen von den Ordnungen $\nu, \nu' \dots$ und ist n das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $\nu, \nu' \dots$, so lässt die Transformation T^n die 5 gegebenen Punkte ungeändert, und die Kollineation T ist demnach eine cyklische.

Wenn man nämlich ν Elemente $\kappa\nu$ -mal cyklisch versetzt, wobei κ eine ganze Zahl bedeutet, so erhält man dieselben wieder in der ursprünglichen Reihenfolge. Da nun n ein Vielfaches der Zahlen $\nu, \nu' \dots$ sein soll, so führt eine n -malige Anwendung der Permutation, welche in die betreffenden Cyklen zerfällt, zu der anfänglichen Reihenfolge der 5 Punkte zurück. Diese werden daher durch die Transformation T^n in sich selbst übergeführt.

Die Zahl n wird sich in jedem der zu betrachtenden 6 Fälle sofort ergeben; allemal ist dann also

$$T^n = T_1.$$

Da ferner die sämtlichen Invarianten λ der Transformation T_1 den Wert $+1$ haben, und da wir in jedem Falle das Haupttetraeder der gerade vorliegenden Kollineation auch als Haupttetraeder der Kollineation T_1 ansehen dürfen, so müssen (nach Satz 10) die Invarianten λ bei jeder unserer Kollineationen der Gleichung

$$\lambda^n = +1$$

genügen.

15. Eine Fläche 2. Grades kann auf 2 Weisen durch eine Kollineation in sich selbst übergeführt werden. Sie wird auf die erste Art in sich transformiert, wenn jede der beiden Geradescharen in sich selbst übergeht. Dann enthält die Fläche 4 Doppelgeraden und die 4 Doppelpunkte der Kollineation. Eine Fläche wird auf die zweite Art in sich selbst verwandelt, wenn aus jeder der beiden Regelscharen die jeweilige andere entsteht. Dann trägt die Fläche nur 2 Doppelpunkte und keine Doppelgeraden der Kollineation. Eine beliebige Kollineation führt weder auf die erste noch auf die zweite Art eine allgemeine Fläche 2. Grades in sich selbst über¹⁾.

16. Wenn eine allgemeine Fläche 2. Grades durch eine Kollineation auf die erste Art in sich transformiert wird, so geschieht dies für alle Flächen, welche durch dasselbe Kantenvierseit des Haupttetraeders gehen, wie jene, und welche also zugleich einen Büschel und eine Schar bilden. Damit eine Kollineation eine allgemeine Fläche 2. Grades, und dann sofort einen ganzen Büschel auf die erste Art in sich selbst überführt, ist es nötig und hinreichend, dass eine der 3 Gleichungen

$$\lambda_{\omega\pi} = \lambda_{\sigma\rho}, \quad \lambda_{\omega\rho} = \lambda_{\pi\sigma}, \quad \lambda_{\omega\sigma} = \lambda_{\rho\pi}$$

besteht, mit denen bezüglich

1) R. Sturm, Math. Ann., Bd. 26, S. 465 ff.

$$\lambda_{\omega\sigma} = \lambda_{\pi\rho}, \quad \lambda_{\omega\pi} = \lambda_{\rho\sigma}, \quad \lambda_{\omega\rho} = \lambda_{\sigma\pi}$$

äquivalent sind. Ist z. B. die erste dieser Gleichungen erfüllt, so werden die Flächen des Büschels $|OPRS|$ in sich transformiert, d. h. die Flächen des Büschels, welcher das Vierseit $OPRS$ zur Grundkurve hat¹⁾.

17. Wird durch eine Kollineation eine allgemeine Fläche 2. Grades auf die zweite Art in sich transformiert, so geschieht dies für alle Flächen eines in sich dualen, linearen Systems 2. Stufe. Damit eine Kollineation eine allgemeine Fläche 2. Grades, und dann sofort einen ganzen Bündel auf die zweite Art in sich verwandelt, ist es nötig und hinreichend, dass die Bedingungen

$$\lambda_{\rho\sigma} = -1, \quad \lambda_{\omega\rho} = -\lambda_{\sigma\pi}$$

erfüllt sind, oder eins der 5 analogen Paare von Bedingungen, welche sich auf die andern Kanten des Haupttetraeders beziehen. Im ersteren Falle gehen die sich selbst entsprechenden Flächen alle durch O und P und haben sowohl R und ρ als auch S und σ zu Pol und Polarebene, oder, was dasselbe ist, sie erfüllen die Büschel $|OV_1PV_2|$, wenn das Paar (V_1, V_2) die Involution auf der Geraden RS durchläuft, welche R und S zu Doppelpunkten hat, d. h. die Büschel, für welche die Vierseite OV_1PV_2 die Grundkurven sind²⁾.

18. Wenn eine Fläche 2. Grades F_1^2 durch eine kollineare Transformation T^ν nicht geändert wird, so gehört dieselbe einer Gruppe von ν , im allgemeinen verschiedenen Flächen $F_1^2, F_2^2 \dots F_\nu^2$ an, welche durch die Kollineation T cyklisch in einander übergehen. Je nachdem nun durch die Transformation T^ν jede der beiden Regelscharen der Fläche T_1^2 in sich selbst, oder jede in die andere verwandelt wird, werden wir sagen, dass die Flächen der Gruppe, $F_1^2, F_2^2 \dots F_\nu^2$, durch die Kollineation

1) R. Sturm, a. a. O. S. 469—471.

2) R. Sturm, a. a. O. S. 471—473.

T auf die erste oder auf die zweite Art cyklisch in einander übergeführt werden.

19. Eine beliebige Kollineation transformiert keine allgemeine kubische Raumkurve in sich selbst. Führt eine Kollineation eine allgemeine kubische Raumkurve in sich selbst über, so ist das Haupttetraeder ein Schmiegungstetraeder der Kurve. Man nennt nämlich nach Herrn Schröter¹⁾ ein Tetraeder $OPRS$ ein Schmiegungstetraeder einer Raumkurve 3. Ordnung, wenn dieselbe durch die Punkte O und R hindurchgeht und in diesen Punkten die Ebenen $SOP=\varrho$ und $PRS=\omega$ zu Schmiegungebenen, die Geraden OP und RS zu Tangenten hat. Bei der Benennung eines Schmiegungstetraeders kommt es also auf die Reihenfolge an, in der man die Ecken schreibt: Die Ecken, welche an erster und dritter Stelle stehen, liegen auf der Kurve, die Verbindungslinie der ersten und zweiten und die der dritten und vierten Ecke sind die Tangenten, die Ebene, welche die dritte, und diejenige, welche die erste Ecke nicht enthält, sind die Schmiegungebenen in diesen Punkten der Kurve bezüglich²⁾.

20. Transformiert eine Kollineation eine allgemeine kubische Raumkurve in sich selbst, so werden sämtliche Raumkurven 3. Ordnung, für welche das Haupttetraeder der Kollineation in derselben Weise ein Schmiegungstetraeder ist, wie für die Kurve, die nach Voraussetzung in sich selbst übergeht, in sich verwandelt. Diese Kurven bilden ein in sich duales System 2. Stufe, welches wir durch $[OPRS]$ bezeichnen wollen, wenn $OPRS$ das gemeinschaftliche Schmiegungstetraeder ist, wenn also die Kurven durch O und R hindurchgehen und in diesen Punkten die Linien OP und RS zu Tangenten und die Ebenen SOP und PRS zu Schmiegungebenen haben. Da-

1) Math. Ann. Bd. 25, S. 293.

2) R. Sturm, a. a. O. S. 490.

mit eine Kollineation eine allgemeine kubische Raumkurve, und dann gleich einen ganzen Bündel in sich selbst überführt, ist es notwendig und hinreichend, dass die Doppelbedingung

$$\lambda_{\omega\pi} = \lambda_{\sigma\rho} = \lambda_{\pi\sigma},$$

oder eine der 11 analogen befriedigt wird. Im erstenen Falle erfüllen die Kurven den Bündel $|OPRS|^{(1)}$.

21. Um die Mannigfaltigkeit der einzelnen Kollineationen leicht ermitteln zu können, machen wir schon hier folgende Überlegung. Es lassen sich ∞^{15} mal 5 beliebige Punkte im Raum auswählen. Wird nun eine Kollineation T dadurch bestimmt, dass aus 5 gegebenen Punkten dieselben Punkte in anderer Reihenfolge hervorgehen sollen, und ist es dann auf ∞^x Weisen möglich, 5 Punkte aus dem Raume herauszugreifen, welche rücksichtlich der Transformation T dieselben Eigenschaften besitzen, wie jene 5 Punkte bezüglich, so kann man die Kollineation T ∞^x mal in derselben Weise festlegen, wie es durch die 5 gegebenen Punkte geschehen ist. Mithin giebt es im Raum ∞^{15-x} Kollineationen von der Beschaffenheit der Kollineation T .

$$T_2 = (A_1) (A_2) (A_3) (A_4 A_5).$$

§ 1. Da, wie wir sehen, die Transformation T_2^2 alle Punkte des Raumes unverändert lässt, so entspricht jedem Punkte vermöge der Kollineation T_2 ein anderer Punkt in beiderlei Sinn der Beziehung. *Wir haben es also mit einer involutorischen Kollineation zu thun, und zwar ist es die involutorische Homologie*, wie sich aus der folgenden Betrachtung ergibt.

Die Gerade $A_4 A_5$ entspricht sich selbst und trägt eine Punktinvolution, da A_4 und A_5 sich involutorisch entsprechen. Ebenso ist die Ebene $A_1 A_2 A_3$, die wir ω nennen

1) R. Sturm, a. a. O. S. 490 ff.

wollen, eine Doppelebene, welche sich deckende Felder enthält, weil ausser den Punkten A_1, A_2, A_3 noch der Schnitt mit A_4A_5 nicht verändert wird. Dieser Schnittpunkt ist zugleich der eine Doppelpunkt der Involution auf A_4A_5 . Der andere Doppelpunkt ist der vierte harmonische Punkt O zu ihm in bezug auf A_4 und A_5 . In dem Bündel O entsprechen sich ausser dem Strahl OA_4A_5 auch die Geraden nach den Punkten A_1, A_2, A_3 selbst, also alle Elemente.

Ausser O und den Punkten der Ebenen ω kann es keine Doppelpunkte mehr geben; sonst müssten die kollinearen Räume sich nämlich vollständig decken, was im Widerspruche steht zu dem Umstande, dass A_4 und A_5 in einander übergehen. Ebenso gibt es ausser ω und den Ebenen durch O keine Doppelebenen und ausser den Strahlen durch O und in ω keine Doppelgeraden. Also:

Die vorliegende Kollineation lässt alle Elemente einer Ebene ω und eines Bündels O unverändert. Ausser diesen werden keine Elemente in sich selbst übergeführt.

In jeder Ebene durch O haben wir eine involutorische Homologie, da jede sich selbst entspricht, und da es ausser der involutorischen Homologie keine involutorische Kollineation zweier Felder derselben Ebene giebt. Das Centrum der Involution in allen diesen Ebenen ist O , die Achse der Involution ist der jeweilige Schnitt mit der Ebene ω . Auf jedem Strahl durch O befinden sich involutorische Punktreihen welche O zum einen, den Schnitt mit ω zum andern Doppelpunkt haben. Die Verbindungslinien zweier, von einander verschiedener entsprechender Punkte sind Doppelgeraden und müssen durch O gehen, da sie nicht ganz in der Ebene ω liegen können. Weil der Treffpunkt eines beliebigen Strahles mit der Ebene ω ein Doppelpunkt ist, so geht durch denselben auch der entsprechende Strahl, mithin schneiden sich je 2 gepaarte Geraden in einem Punkt der Ebene ω . Dual liegen je 2 gepaarte Geraden in einer Ebene durch O .

Wir haben ∞^3 Paare sich involutorisch entsprechen-

der Punkte und ∞^2 sich selbst entsprechende Punkte. Aus letzteren kann man auf ∞^6 Weisen 3 herausgreifen, so dass sich ∞^9 mal 3 derselben mit einem Paar getrennter entsprechender Punkte kombinieren lassen. Daraus folgt (nach Satz 21), dass die Mannigfaltigkeit der involutorischen Homologien ∞^6 ist.

§ 2. Während im allgemeinen bei einer Kollineation die Verbindungslinien entsprechender Punkte einen sogenannten tetraedralen oder Reyeschen Komplex bilden, kann man im jetzigen Falle jede Gerade des Raumes als Verbindungslinie zweier gepaarter Punkte auffassen, insofern ihr Schnitt mit der Ebene ω sich selbst entspricht. Unter diesen Geraden zeichnen sich die Strahlen durch O und in der Ebene ω als Verbindungslinien von je ∞^1 Paaren entsprechender Punkte aus.

Es giebt nicht nur ein, sondern ∞^6 Haupttetraeder; denn wir können jedes Tetraeder, für welches O eine Ecke und ω die gegenüberliegende Seitenfläche ist, als Haupttetraeder ansehen. Da alle Verbindungslinien zweier getrennter entsprechender Punkte durch O gehen, so fallen auf allen die 3 Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ mit O zusammen, während der Punkt $\mathfrak{D}$ in der Ebene ω liegt. Daher ist

$$\begin{aligned} \lambda_{\pi q} &= \lambda_{q\sigma} = \lambda_{\sigma\pi} = \lambda_{\pi\sigma} = \lambda_{\sigma q} = \lambda_{q\pi} = +1, \\ \lambda_{\omega\pi} &= \lambda_{\pi\omega} = \lambda_{\omega q} = \lambda_{q\omega} = \lambda_{\omega\sigma} = \lambda_{\sigma\omega} = -1; \end{aligned}$$

und ferner ist (nach Satz 11)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1+1}{1+1} : \frac{1-1}{1-1}, \\ A &= \frac{0}{0}, \end{aligned}$$

also unbestimmt.

§ 3. Es ist ohne weiteres klar, dass alle die ∞^6 Flächen 2. Grades, welche O und ω zu Pol und Polarebene haben, in sich selbst transformiert werden, und zwar auf die zweite Art, da sich je zwei gepaarte Geraden in der Ebene ω schneiden. Zu denselben gehört offenbar jede Fläche

2. Grades, welche durch 3 Paare entsprechender Punkte gelegt ist. *Diese Flächen erfüllen ein in sich duales, lineares System 6. Stufe*, weil die Bedingung, einen Punkt und eine Ebene zu Pol und Polarebene zu haben, für eine Fläche 2. Grades eine in sich duale, dreifache lineare Bedingung ist¹⁾. In diesem System sind unter andern alle Kegel mit dem Scheitel O und alle Kegelschnitte in der Ebene ω enthalten.

Eine allgemeine kubische Raumkurve kann nicht in sich transformiert werden. Nehmen wir nämlich an, eine solche, K^3 , entspräche sich selbst, und verbinden wir dann einen beliebigen Punkt X_1 derselben mit O , so müsste diese Verbindungslinie die K^3 noch in einem weiteren Punkte schneiden, nämlich in dem vierten harmonischen Punkt X_2 zu X_1 in bezug auf O und ω . Das ist aber nicht möglich; denn durch einen gegebenen Punkt giebt es nur eine Sehne einer Raumkurve 3. Ordnung.

Man könnte glauben, es liesse sich durch 3 Paare entsprechender Punkte eine in sich selbst übergehende kubische Raumkurve legen. Eine solche artet jedoch in 3, sich im Punkte O schneidende Geraden aus.

$$T_3 = (A_1 A_2) (A_3 A_4) (A_5).$$

§ 4. Aus denselben Gründen, wie die vorige, ist auch die jetzt vorliegende kollineare Verwandtschaft eine involutorische. Das involutorische System, welches sich hier ergibt, ist ein sogenanntes geschart involutorisches System. Wir erhalten die wichtigsten Eigenschaften desselben unter Zugrundelegung der gegebenen Bestimmungsweise durch folgende Überlegungen.

Die Geraden $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ entsprechen sich selbst und tragen involutorische Punktreihen. Die Schnittlinie

1) Vergl. R. Sturm, Math. Ann., Bd. 26, S. 475.

u der beiden Ebenen $A_1A_2A_5$ und $A_3A_4A_5$ ist ebenfalls eine Doppelgerade, da die beiden Ebenen sich selbst entsprechen. Die Punktreihen auf u sind identisch, weil ausser dem Punkt A_5 auch die Schnitte U und U' mit den Strahlen A_1A_2 und A_3A_4 Doppelpunkte sein müssen. U und U' sind 2 Doppelpunkte der Involutionen auf A_1A_2 und A_3A_4 bezüglich. Die beiden andern Doppelpunkte derselben sind die vierten harmonischen Punkte V und V' zu U und U' in bezug auf A_1 und A_2 resp. A_3 und A_4 . Weiter ist die Gerade VV' , die wir v nennen, eine Doppelgerade, welche zu u windschief ist, da die Geraden A_1A_2 und A_3A_4 beide treffen und nicht in einer Ebene liegen. Die Ebene Vu , welche sich selbst entspricht, enthält 2 kollineare Felder, die eine Gerade u mit lauter Doppelpunkten besitzen; diese Felder sind demnach homologisch, und zwar, da ausserdem die Punkte A_1 und A_2 gepaart sind, involutorisch. V ist das Centrum, u die Achse des involutorischen Systems. Ausser V und den Punkten von u giebt es in dieser Ebene keinen weiteren Doppelpunkt. Betrachten wir nun die Doppelebene $U'v$, welche, da sie in sich selbst übergeht, wegen der involutorischen Lage der kollinearen Räume ebenfalls eine involutorische Homologie tragen muss. Die Punkte U' , V , V' sind drei Doppelpunkte in dieser Ebene; also muss eine Seite des Dreiecks $U'VV'$ sich Punkt für Punkt entsprechen. Die Gerade $U'V'$ kann es nicht sein, da die auf ihr liegenden Punkte A_3 und A_4 sich gegenseitig entsprechen. Wäre es $U'V$, so hätten wir in der Ebene Vu 2 Geraden mit lauter sich selbst entsprechenden Punkten, nämlich u und $U'V$, was dem vorhin Gesagten widerspricht. Folglich enthält die Gerade v identische Punktreihen. Die beiden Linien u und v sind demnach die Achsen des geschart involutorischen Systems. Weil die Punktreihen auf u und die auf v sich decken, so bestehen auch die mit denselben bezüglich perspektiven Ebenenbüschel um v und u aus lauter Doppelebenen. Ausser-

halb der Graden u und v giebt es keine Doppelpunkte mehr, denn sonst würde die Kollineation T_3 alle Punkte des Raumes unverändert lassen. Ebenso wenig giebt es eine Doppelebene, welche nicht durch u oder v geht.

Da alle Punkte der Achsen u und v Doppelpunkte sind, so müssen auch alle Geraden, welche u und v treffen, sich selbst entsprechen und infolgedessen involutorische Punktreihen tragen. Umgekehrt muss jede Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte X_1 und X_2 die beiden Achsen treffen; denn auf der Geraden X_1X_2 befinden sich involutorische Punktreihen, deren Doppelpunkte auf u und v liegen, da es sonst überhaupt keine Doppelpunkte giebt. Je 2 entsprechende Punkte werden also durch die Achsen harmonisch getrennt. Wir haben folgende Resultate:

Bei der gegenwärtigen Transformation giebt es 2 reelle, zu einander windschiefe Doppelgeraden, die sogenannten Achsen, u und v , welche sich deckende Punktreihen und Ebenenbüschel tragen. Alle dieselben schneidenden Geraden entsprechen sich selbst und enthalten involutorische Punktreihen, deren Doppelpunkte auf den Achsen u und v liegen. Jede Verbindungslinie entsprechender Punkte schneidet beide Achsen.

Wir haben ∞^3 Paare getrennter entsprechender Punkte, die man auf ∞^6 Weisen zu zweien kombinieren kann. Da ferner ∞^1 sich selbst entsprechende Punkte vorhanden sind, so kann man auf ∞^7 Arten 5 Punkte wählen, welche in bezug auf die Kollineation T_3 dieselben Eigenschaften resp. besitzen, wie die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Daher ist (nach Satz 21) die Mannigfaltigkeit der geschart involutorischen Systeme im Raume ∞^8 .

§ 5. Der tetraedrale Komplex, welcher durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte gebildet wird, zerfällt in die beiden speciellen linearen Komplexe mit den Achsen u und v . Jeden Strahl, welcher u oder v trifft, können wir ja als Verbindungslinie der beiden entsprechenden Punkte

auffassen, die in seinem Schnitt mit u oder v zusammenfallen. Der Komplex enthält eine ausgezeichnete lineare Kongruenz mit den Leitlinien u und v , deren sämtliche Geraden Verbindungslinien von je ∞^1 Punktepaaren sind.

Alle die Tetraeder, welche u und v zu Gegenkanten haben, können wir als Haupttetraeder ansehen. Die beiden beliebig auf u befindlichen Doppelpunkte nennen wir O und P , die auf v R und S , so dass die Ebenen ω und π durch v , ϱ und σ durch u gehen. Die Schnittpunkte $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{P}$ der Verbindungslinien entsprechender Punkte mit den Ebenen ω und π fallen auf v , während die Punkte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ auf u liegen. Ohne weiteres ergibt sich daher:

$$\lambda_{\omega\pi} = \lambda_{\pi\omega} = \lambda_{\varrho\sigma} = \lambda_{\sigma\varrho} = +1,$$

$$\lambda_{\omega\varrho} = \lambda_{\varrho\omega} = \lambda_{\omega\sigma} = \lambda_{\sigma\omega} = \lambda_{\pi\varrho} = \lambda_{\varrho\pi} = \lambda_{\pi\sigma} = \lambda_{\sigma\pi} = -1;$$

daraus folgt:

$$A = \frac{1+1}{1+1} : \frac{1+1}{1+1},$$

$$A = +1,$$

was wir auch direkt hätten einsehen können.

§ 6. Da die sämtlichen Geraden, welche u und v treffen, sich selbst entsprechen, so wird jede der ∞^3 Flächen 2. Grades, welche durch u und v gelegt werden können, auf die erste Art in sich selbst transformiert¹⁾. Bei jeder dieser Flächen werden die Geraden der Regelschar, welcher u und v angehören, involutorisch gepaart, während die Geraden der andern Schar sich je selbst entsprechen. Durch 3 beliebige Punkte des Raumes ist eine Fläche dieses Systems bestimmt; wenn wir nämlich die 3 Treffgeraden der Achsen u und v durch diese Punkte konstruieren, so ist durch diese die eine Regelschar festgelegt. Daher ist das System dieser Flächen ein lineares System 3. Stufe, und zwar ein in sich duales; denn wir können die Bestimmung einer dieser Flächen ebenso gut dual vornehmen.

1) Vergl. R. Sturm, Math. Ann., Bd. 26, S. 474 f.

Jedes Paar entsprechender Geraden x_1 und x_2 liegt mit den beiden Achsen u und v auf einer sich selbst entsprechenden Fläche 2. Grades; durch die 3 Geraden u, v, x_1 ist nämlich eine sich selbst entsprechende Fläche des vorhin besprochenen Systems bestimmt, welche daher auch die Linie x_2 enthalten muss.

Ausser diesen Flächen werden auch noch alle ∞^5 Flächen 2. Grades, welche u und v zu Polargeraden haben, in sich selbst verwandelt¹⁾. Bei diesen sind die Geraden einer jeden Schar involutorisch gepaart. Ist nämlich x_1 eine die Achse nicht schneidende Gerade einer dieser Flächen, so wird dieselbe von ihrer entsprechenden Geraden x_2 nicht getroffen, da sie keinen Doppelpunkt enthält; deshalb können die Geraden x_1 und x_2 nicht verschiedenen Scharen derselben Fläche 2. Grades angehören. Diese Flächen bilden ein in sich duales, lineares System 5. Stufe, weil die Bedingung, 2 gegebene Geraden zu Polargeraden zu haben, eine in sich duale, vierfache lineare Bedingung ist. In diesem System sind alle Kegelschnitte in Ebenen durch u oder v , welche u bezüglich v und den Schnitt ihrer Ebene mit v resp. u zu Polare und Pol haben, enthalten. Dual haben wir sich selbst entsprechende Kegel, deren Scheitel sich auf u oder v befinden.

Denken wir uns 4 beliebige Paare entsprechender Punkte $X_1, X_2; X'_1, X'_2; X''_1, X''_2; X'''_1, X'''_2$ gegeben und schneiden die Verbindungslinien $X_1 X_2, X'_1 X'_2, X''_1 X''_2, X'''_1 X'''_2$ mit den Geraden u und v in den Punkten U, U', U'', U''' bezüglich V, V', V'', V''' , so sind in bezug auf jede durch die 8 Punkte $X_1 \dots X'''_2$ gelegte Fläche 2. Grades F^2 die Punkte U, U', U'', U''' konjugiert. Bezeichnen wir die Polargeade der Geraden u in bezug auf die Fläche F^2 mit w , und nehmen an, dass w von v verschieden sei, so sind die

1) Vergl. R. Sturm, a. a. O. S. 475.

Ebenen wV, wV', wV'', wV''' die Polarebenen der Punkte U, U', U'', U''' resp. in bezug auf die F^2 . Also ist:

$$(UU'U''U''') \wedge w(VV'V''V''') \wedge (VV'V''V''').$$

Das ist aber nur dann möglich, wenn die 4 Geraden $UV, U'V', U''V'', U'''V'''$ einer Regelschar angehören. Da dies im allgemeinen nicht statthat, so muss w mit v identisch sein, und wir haben den Satz:

Jede Fläche 2. Grades durch die 8 Punkte $X_1, X_2 \dots X_2''$ vierer Paare hat im allgemeinen, d. h. wenn die 4 Geraden $X_1X_2, X_1'X_2', X_1''X_2'', X_1'''X_2'''$ sich nicht in derselben Regelschar befinden, die Achsen u und v zu Polargeraden, und wird folglich in sich selbst transformiert.

Ausser den beiden betrachteten Systemen von Flächen giebt es keine weiteren sich selbst entsprechenden Flächen 2. Grades. Ist nämlich F^2 irgend eine Fläche 2. Grades, welche auf die erste Art in sich selbst transformiert wird, so muss dieselbe (nach Satz 15) durch ein Kantenvierseit des Haupttetraeders gehen, also entweder durch ein solches, welches u und v zu Gegenkanten hat, — und dann gehört die Fläche dem ersten der besprochenen Systeme an, — oder durch ein solches windschiefes Vierseit, für welches u und v Diagonalen sind, — und in diesem Falle sind u und v für die Fläche F^2 Polargeraden, und sie ist also in dem zweiten System enthalten.

Auf die zweite Art kann (nach Satz 15) überhaupt keine Fläche 2. Grades in sich selbst übergeführt werden, da auf jeder mindestens 4 Doppelpunkte liegen, nämlich ihre Schnitte mit u und v .

Fassen wir die durch u und v gelegten Flächen 2. Grades als Liniengebilde auf und betrachten nur die Schar, welche u und v enthält, so ergibt sich sofort:

Alle linearen Komplexe und alle linearen Kongruenzen, welche die beiden Geraden u und v enthalten, werden in sich selbst verwandelt.

Ebenso folgt, wenn wir die Flächen des zweiten besprochenen Systems als Liniengebilde ansehen:

Alle linearen Komplexe, welche u und v zu Polaren haben, gehen in sich selbst über.

§ 7. Herr Sturm beweist¹⁾, dass *alle ∞^6 kubische Raumkurven, welche die Achsen u und v zu associierten Geraden haben, in sich selbst transformiert werden.* Zwei associierte Geraden einer kubischen Raumkurve sind nämlich solche zu 2 Punkten der Kurve gehörige Schmiegungsstrahlen, von denen jeder die Tangente des andern Punktes trifft, und diese haben nach Cremona die Eigenschaft, dass jede Sehne der Kurve, welche der einen begegnet, auch die andere schneidet, und dass die Treffpunkte harmonisch sind zu den Schnitten mit der Kurve. Alle diese Kurven haben eins der Tetraeder $ORPS$, für welche u und v Gegenkanten sind, zum Schmiegungstetraeder.

Durch die 6 Punkte dreier Paare $X_1, X_2; X'_1, X'_2; X''_1, X''_2$ und 2 beliebige Punkte U und U' der Geraden u ist ein Büschel von Flächen 2. Grades festgelegt, dessen Grundkurve wir K^4 nennen; die 8 Punkte $X_1 \dots U'$ können nämlich nicht 8 associierte Punkte sein, weil die 7 Punkte $X_1, X_2, X'_1, X'_2, X''_1, X''_2, U$ einen achten Punkt, welcher zu ihnen associirt ist, eindeutig bestimmen, während doch U' willkürlich auf u gewählt ist. Sei F_1^2 eine beliebige Fläche des Büschels, welche die Gerade v in den Punkten V und V' schneiden möge, so geht die Fläche F_2^2 , welche ihr gepaart ist, ebenfalls durch die 10 Punkte $X_1, X_2, X'_1, X'_2, X''_1, X''_2, U, U', V, V'$, und diese liegen demnach auf der Kurve K^4 . Damit haben wir den Satz gewonnen:

Jede Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, welche durch die 6 Punkte dreier Paare gelegt ist, und für welche die Gerade u oder v eine Sehne ist, hat auch v resp. u zur Sehne und entspricht sich selbst.

1) a. a. O. S. 492.

Ebenso lässt sich beweisen:

Die Geraden u und v sind für jede Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, welche durch die 6 Punkte dreier Paare geht und die Geraden u und v zu Sekanten hat, Doppelsekanten.

$$T_4 = (A_1 A_2 A_3) (A_4) (A_5).$$

§ 8. Die Transformation T_4^3 lässt alle Punkte des Raumes ungeändert; daher haben wir es mit kollinearen Räumen in Tripellage zu thun. Wir erhalten unendlich viele Dreiecke, deren Ecken einen Cyklus bilden, und deren Ebenen sich alle selbst entsprechen, wie z. B. die Ebene $A_1 A_2 A_3$. Die Gerade $A_4 A_5$, die wir u nennen, ist eine Doppelgerade, welche identische Punktreihen trägt, da die Punkte A_4, A_5 und der Schnittpunkt mit der Ebene $A_1 A_2 A_3$ in sich selbst transformiert werden. Die kollinearen Felder in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ befinden sich in Tripellage, weil die Punkte A_1, A_2, A_3 einen Cyklus bilden. Der reelle Doppelpunkt in dieser Ebene ist ihr Schnitt mit u , die reelle Doppelgerade nennen wir v . Da die letztere (nach Satz 6) nicht durch den reellen, auf u liegenden Doppelpunkt geht, so sind die Geraden u und v zu einander windschief. Die Punktreihen auf v bilden eine cyklische Involution 3. Ordnung; mit ihnen sind die Ebenenbüschel um u perspektiv. Die konjugiert imaginären Doppelpunkte auf v bezeichnen wir mit R und S , die durch dieselben bezüglich hindurchgehenden Doppelebenen der Büschel um u mit σ und ϱ . Jede Ebene durch v ist eine Doppelebene, weil sie die Doppelgerade v mit einem auf u liegenden Doppelpunkt verbindet. Ausser ϱ und σ und den Ebenen durch v kann es keine Doppelebenen mehr geben, denn sonst würde die Transformation T_4 alle Ebenen des Raumes in sich selbst überführen. Daher müssen die oben erwähnten reellen Dreiecksebenen alle durch v gehen.

Wir haben folgende Resultate.

Bei der Kollineation T_4 giebt es 2 zu einander windschiefe, reelle Doppelgeraden u und v . Die Punktreihen auf u , sowie die Ebenenbüschel um v decken sich bezüglich; die Punktreihen auf v und die zu denselben perspektiven Ebenenbüschel um u befinden sich in Tripellage. Die Verbindungsebenen je dreier Punkte eines Tripels gehen durch v , und dual liegen die Schnittpunkte je dreier Ebenen eines Tripels auf u .

Die Eigenschaften des Haupttetraeders der jetzigen Kollineation sind von Herrn F. Schur in einem Aufsätze „Über eine besondere Klasse von Flächen 4. Ordnung“ bei Gelegenheit der Betrachtung zweier auf neunfache Weise hyperboloidisch liegender Tetraeder erwähnt¹⁾.

Wir haben ∞^3 Punkttripel im Raum und ∞^1 sich selbst entsprechende Punkte auf u und können daher auf ∞^5 Weisen die Transformation T_4 in analoger Weise durch 5 Punkte bestimmen, wie es geschehen ist. Folglich giebt es im Raum ∞^{10} Kollineationen von der Beschaffenheit der T_4 .

§ 9. Da jede Verbindungsebene dreier Punkte eines Tripels durch v geht, so schneiden alle Verbindungslinien zweier getrennter entsprechender Punkte die Gerade v . Umgekehrt ist auch jede Gerade x_1 , welche v trifft, die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte, denn in der Ebene vx_1 , welche sich selbst entspricht, liegen auch die beiden Geraden x_2 und x_3 , welche x_1 zu einem Geraden-tripel ergänzen; die Gerade x_1 schneidet demnach die Geraden x_2 und x_3 und verbindet die entsprechenden Punkte x_3x_1 und x_1x_2 . Dual begegnet die Schnittlinie je zweier getrennter entsprechender Ebenen der Geraden u . Man kann letztere auch als Verbindungslinie der beiden in ihren Schnitt mit u zusammenfallenden entsprechenden

1) Math. Ann., Bd. 20, S. 273.

Punkte ansehen. Daher zerfällt der *Reyesche Komplex* unserer *Kollineation* wiederum in die beiden *speziellen linearen Komplexe* mit den Achsen u und v .

Während die 3 Geraden eines *Geradentripels* im allgemeinen zu einander windschief sind, bilden die in dem ersten *speziellen linearen Komplex* enthaltenen *Tripel* je einen *Dreistrahl*, die in dem zweiten befindlichen je ein *Dreieck*. Jene *Dreistrahlen* sind durch die 3 *Schnittlinien* eines *Ebenentripels* gebildet, und dual sind die *Ecken* dieser *Dreiecke* *Punkttripel*.

Unsere *Kollineation* besitzt ∞^2 *Haupttetraeder*, welche die *Ecken* R und S gemeinsam haben, während die beiden *Ecken* O und P die Gerade v durchlaufen.

Die *Invarianten* λ müssen der Gleichung

$$\lambda^3 = +1$$

genügen. Da die 3 Punkte eines *Tripels* sich immer in einer Ebene durch die Linie $v = \omega\pi$ befinden, so schneiden die *Verbindungslinien* je zweier entsprechender Punkte die Ebenen ω und π in demselben Punkte; mithin ist

$$\lambda_{\omega\pi} = \lambda_{\pi\omega} = +1.$$

Die übrigen *Invarianten* λ können nicht den Wert $+1$ haben; denn die *Verbindungslinien* entsprechender Punkte gehen durch keine andere Kante des *Haupttetraeders*, als durch v , hindurch. Berücksichtigen wir den für $\lambda_{\omega\pi}$ gefundenen Wert, so vereinfachen sich die Beziehungen zwischen den *Invarianten* λ folgendermassen:

$$\lambda_{\pi\rho} = \lambda_{\omega\rho}, \lambda_{\sigma\pi} \cdot \lambda_{\omega\sigma} = +1, \lambda_{\rho\sigma} = \lambda_{\omega\sigma} : \lambda_{\omega\rho}.$$

Die beiden *Invarianten* $\lambda_{\omega\sigma}$ und $\lambda_{\omega\rho}$ haben verschiedene Werte, weil sonst $\lambda_{\rho\sigma} = +1$ wäre; also

$$\lambda_{\omega\sigma} = \frac{1}{2} (-1 \pm i\sqrt{3}), \lambda_{\omega\rho} = \frac{1}{2} (-1 \mp i\sqrt{3}).$$

Wir dürfen uns auf das obere Vorzeichen beschränken; ein Wechsel des Vorzeichens kommt nämlich nur auf eine Vertauschung der konjugiert imaginären Punkte R und S hinaus; demnach lässt sich die Bezeichnung der *Doppelpunkte* auf v so einrichten, dass

$\lambda_{\omega\sigma} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \lambda_{\omega\rho} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$
ist. Dann folgt

$$\lambda_{\sigma\omega} = \frac{1}{\lambda_{\omega\sigma}} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}), \lambda_{\rho\omega} = \frac{1}{\lambda_{\omega\rho}} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$

$$\lambda_{\rho\sigma} = \lambda_{\omega\sigma} : \lambda_{\omega\rho} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{-1 - i\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(-1 + i\sqrt{3})^2 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}),$$

$$\lambda_{\sigma\rho} = \frac{1}{\lambda_{\rho\sigma}} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$

$$\lambda_{\pi\rho} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}), \lambda_{\rho\pi} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$

$$\lambda_{\sigma\pi} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}), \lambda_{\pi\sigma} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}).$$

Wir haben also ermittelt:

$$\lambda_{\omega\pi} = \lambda_{\pi\omega} = +1,$$

$$\lambda_{\omega\rho} = \lambda_{\rho\sigma} = \lambda_{\sigma\pi} = \lambda_{\pi\rho} = \lambda_{\sigma\omega} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}),$$

$$\lambda_{\omega\sigma} = \lambda_{\sigma\rho} = \lambda_{\rho\pi} = \lambda_{\pi\sigma} = \lambda_{\rho\omega} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}).$$

Zur Kontrolle bemerken wir noch, dass eine Vertauschung der Punkte O und P , welche beliebige Punkte auf u sind, an den Werten nichts ändern darf. Aus den gewonnenen Werten ergibt sich

$$A = \frac{1 - \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})}{1 - \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})} : \frac{1 - \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})}{1 - \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})}$$

$$A = +1.$$

Diesen Wert der Invarianten A mussten wir erwarten, da die Punkte $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{P}$ auf den Verbindungslinien nicht identischer, entsprechender Punkte zusammenfallen.

§ 10. *In jeder Ebene durch v haben wir (nach Satz 7) einen Büschel sich selbst entsprechender Kegelschnitte. Alle diese Kegelschnitte berühren die Ebenen ρ und σ in S und R bezüglich und bilden einen Bündel im Raum; durch jeden Punkt X_1 ist nämlich einer bestimmt; derselbe liegt in der Ebene X_1v und berührt die Schnittlinien dieser Ebene mit ρ und σ in S und R bezüglich.*

Ziehen wir an irgend einen Kegelschnitt dieses Bündels die 3 Tangenten in den Punkten eines auf ihm liegenden Tripels und schneiden jede derselben mit der Verbindungs-

linie der beiden andern Punkte des Tripels, so erhalten wir (nach Satz 8) 3 auf der Geraden v gelegene Schnittpunkte, welche einen Cyklus bilden, wie wir leicht erkennen können.

Seien nun $(X_1, X_2, X_3), (Y_1, Y_2, Y_3), (Z_1, Z_2, Z_3)$ irgend 3 Punkttripel, so lässt sich durch die 9 Punkte derselben eine Fläche 2. Grades legen, welche in sich selbst transformiert wird. Die Ebene $X_1X_2X_3$ schneidet, da sie eine Doppelebene ist, aus der Fläche einen sich selbst entsprechenden Kegelschnitt aus, und zwar muss dieser mit dem durch das Tripel bestimmten Kegelschnitt des vorhin besprochenen räumlichen Bündels identisch sein; denn durch jedes Punkttripel geht nur ein sich selbst entsprechender Kegelschnitt. Analoges gilt für die beiden Ebenen $Y_1Y_2Y_3$ und $Z_1Z_2Z_3$. Halten wir die beiden Tripel (X) und (Y) fest und variieren (Z) , so erhalten wir, da im ganzen Raume ∞^3 , auf einer sich selbst entsprechenden Fläche ∞^2 Tripel vorhanden sind, ∞^1 Flächen 2. Grades durch die beiden Tripel (X) und (Y) welche sich selbst entsprechen. Diese bilden einen Büschel, weil jeder Punkt Z_1 eindeutig eine bestimmt, nämlich diejenige, welche auch noch durch Z_2 und Z_3 geht. Die Grundkurve dieses Büschels zerfällt in die beiden durch die Tripel (X) und (Y) festgelegten Kegelschnitte des obigen Bündels. Variieren wir nun auch das Tripel (Y) , so ergeben sich aus ähnlichen Gründen durch das Tripel (X) ∞^2 sich selbst entsprechende Flächen 2. Grades, welche einen Bündel bilden. Im ganzen Raum bekommen wir endlich ∞^3 solche Flächen, welche ein lineares System 3. Stufe erfüllen.

Durch die 3 Geraden eines beliebigen Geradentripels (x_1, x_2, x_3) ist eine Regelschar eindeutig bestimmt. Dieselbe entspricht sich selbst und ist cyklisch projektiv auf sich selbst bezogen. Dasselbe gilt von der anderen Regelschar des Hyperboloides, welches die erste trägt. Diese kann nämlich nicht aus lauter sich selbst entsprechenden Geraden bestehen, denn deren giebt es ausser u und v nur 2 Büschel,

(Ru) und (Su) ; sie bildet daher (nach Satz 13) eine cyklische Involution 3. Ordnung. Da es im Raum ∞^4 , auf einer sich selbst entsprechenden Fläche ∞^1 Geradentripel giebt, so werden wir wieder zu einem System 3. Stufe geführt. Dasselbe ist jedoch mit dem vorigen identisch; denn einerseits gelangen wir, wenn wir von 3 allineierten Punkten X_1, Y_1, Z_1 und den durch sie bestimmten Punktripeln $(X), (Y), (Z)$ ausgehen, zu einer Fläche durch die 3 Geraden $X_1Y_1Z_1, X_2Y_2Z_2, X_3Y_3Z_3$ eines Geradentripels, und andererseits können wir uns zur Festlegung einer Fläche des letzten Systems auch 9 Punkte dreier beliebiger Tripel geben, von denen keine 3 aus verschiedenen Tripeln allineiert sind.

§ 11. Um dieses System nun genauer zu untersuchen, betrachten wir irgend eine Fläche 2. Grades F^2 , welche in sich selbst verwandelt wird. Dieselbe kann die Gerade v nicht enthalten. Nehmen wir nämlich an, v läge ganz auf der Fläche, so müsste, da alle Ebenen durch v Doppelsebenen sind, der in ein Geradenpaar zerfallende Schnitt einer beliebigen Ebene durch v mit der F^2 sich selbst entsprechen, und da der eine Teil desselben, v , eine Doppelgerade ist, so müsste der andere Teil, also jede Gerade derjenigen Schar, welcher v nicht angehört, auch eine solche sein. Das ist aber, wie schon erwähnt wurde, nicht möglich. Daher schneidet v die Fläche F^2 in 2 Punkten. Dieselben sind die Doppelpunkte R und S , da wegen der Tripellage (nach Satz 13) ein gegenseitiges Entsprechen der beiden Schnittpunkte ausgeschlossen ist. Die Berührungspunkte der von v an die F^2 kommenden Tangentialebenen sind Doppelpunkte und liegen auf u , weil sie auf v nicht liegen können; nennen wir sie O und P . Die Geraden u und v sind folglich Polargeraden der F^2 , und mithin berühren die Ebenen $(Ru) \equiv \sigma$ und $(Su) \equiv \varrho$ die Fläche in R und S . Die Paare von Geraden (OR, PS) und (OS, PR) sind die sich selbst entsprechenden Geraden der beiden Regelscharen der Fläche F^2 , von welchen wir ja erkannten, dass sie aus

Geradentripeln bestehen. Ist die Fläche F^2 ein einmantliges Hyperboloid, so sind die Punkte O und P konjugiert imaginär, da ein einmantliges Hyperboloid 2 Polargeraden entweder beide reell oder beide imaginär schneidet, und dann sind die sich selbst entprechenden Geraden jeder Regelschar zu einander konjugiert imaginär. Ist F^2 eine elliptische Fläche, so sind die Punkte O und P reell, und also die sich selbst entprechenden Geraden der einen Schar zu denen der andern bezüglich konjugiert imaginär, OR zu OS und PR zu PS .

Wie die Fläche F^2 , so gehen alle sich selbst entprechenden Flächen 2. Grades durch R und S und berühren in diesen Punkten die Ebenen σ und ϱ . Durch diese Bestimmungen ist ein in sich duales, lineares System 3. Stufe von Flächen 2. Grades definiert. Wir können noch direkt beweisen, dass dasselbe mit dem System 3. Stufe sich selbst entsprechender Flächen 2. Grades übereinstimmt, indem wir zeigen, dass eine beliebige Fläche, welche die Ebenen ϱ und σ in den Punkten S und R berührt, durch die Transformation T_4 nicht verändert wird. Wir legen durch v 2 beliebige Ebenen ω' und π' . Dieselben schneiden die Fläche F^2 in 2 Kegelschnitten, welche in den Punkten R und S die Ebenen σ und ϱ berühren; diese entsprechen sich selbst, und der durch dieselben gehende Büschel von Flächen 2. Grades, dem unsere F^2 und das Ebenenpaar (ω', π') angehören, ist auf sich selbst cyklisch projektiv bezogen. Wir wissen aber von dem reellen Ebenenpaar (ω', π') , dass es in sich selbst transformiert wird. Mithin gehen (nach Satz 4), weil involutorisches Entsprechen (nach Satz 13) unmöglich ist, alle Flächen des Büschels, also auch die F^2 , in sich selbst über.

Zugleich haben wir erkannt, dass jeder Büschel von Flächen 2. Grades, welcher 2 beliebige der sich selbst entprechenden Kegelschnitte zur Grundkurve hat, lauter in sich selbst transformierte Flächen enthält, und also unserem

Systeme angehört. Umgekehrt durchdringen sich jede 2 Flächen des Systems in 2 solchen Kegelschnitten, da alle die Ebenen ϱ und σ in den Punkten S und R berühren. Jedes der Vierseite $ORPS$ kann man auch als Ausartung eines derartigen Paares von Kegelschnitten ansehen.

Bei jeder Fläche des Systems wird jede Regelschar in sich selbst verwandelt; denken wir uns nämlich, dass die beiden Regelscharen bei einer Fläche gegenseitig in einander übergangen, so würde die Kollineation T_4^3 oder T_1 auch jede derselben in die andere überführen, während sie doch alle Elemente des Raumes unverändert lässt.

Dass alle Flächen 2. Grades, welche einem der Büschel $|ORPS|$ angehören, d. h. alle, welche durch eins der Vierseite $ORPS$ gehen, auf die erste Art in sich selbst übergeführt werden, ersehen wir auch daraus, dass die Bedingung

$$\lambda_{\omega\rho} = \lambda_{\sigma\pi}$$

für alle Haupttetraeder erfüllt ist.

Wir können die gewonnenen Resultate in folgenden Sätzen aussprechen:

Durch die vorliegende Kollineation werden alle Flächen 2. Grades, welche in den Punkten R und S die Ebenen σ und ϱ bezüglich berühren, und welche infolge dessen ein in sich duales, lineares System 3. Stufe bilden, auf die erste Art in sich selbst übergeführt. Je 2 derselben konstituieren einen Büschel, welcher ein Paar sich selbst entsprechender Kegelschnitte aus dem oben beschriebenen Bündel zur Grundkurve hat. Alle Büschel, für welche ein solches Kegelschnittepaar die Grundkurve ist, gehören dem Systeme an.

§. 12. Geben wir uns jetzt 2 beliebige Punkttupel (X_1, X_2, X_3) und (Y_1, Y_2, Y_3) , so ist durch die 6 Punkte derselben eine kubische Raumkurve eindeutig festgelegt. Dieselbe geht in sich selbst über und trägt projektive Punktreihen in Tripellage. Da wir die Tripel des Raumes auf ∞^6 Weisen zu zweien kombinieren können, während

sich aus den ∞^1 Tripeln, welche eine sich selbst entsprechende Kurve enthält, ∞^2 -mal 2 herausgreifen lassen, so bekommen wir ∞^4 sich selbst entsprechende Raumkurven 3. Ordnung. Durch 2 beliebige Punkte X_1 und Y_1 des Raumes ist eine derselben bestimmt, nämlich diejenige, welche auch noch durch X_2, X_3, Y_2, Y_3 geht.

Um das System dieser Kurven näher kennen zu lernen, fassen wir irgend eine derselben, K^3 , ins Auge. Da die Punktreihen auf derselben cyklisch projektiv sind, so haben wir 2 konjugiert imaginäre sich selbst entsprechende Punkte auf ihr zu suchen. Die Schmiegungebenen sowie die Tangenten in denselben müssen ebenfalls bezüglich konjugiert imaginäre sich selbst entsprechende Elemente sein. Die Gerade v kann keine Sehne der K^3 sein, denn jede Ebene durch v muss als sich selbst entsprechende Ebene dieselbe in 3 Punkten eines Tripels schneiden; die konjugiert imaginären sich selbst entsprechenden Punkte liegen daher vielmehr auf u ; nennen wir sie O und P . Dann sind die Ebenen $Ov = \pi$ und $Pv = \omega$ die Schmiegungebenen in diesen Punkten, und da je 2 nicht benachbarte Tangenten einer kubischen Raumkurve zu einander windschief sind, so sind entweder OR und PS oder OS und PR die Tangenten in denselben. Wir können jedoch die Bezeichnung der Punkte O und P , welche eine gleiche Rolle spielen, so einrichten, dass OR und PS die Tangenten sind. Die Kurve hat dann das Tetraeder $ORPS$ zum Schmiegungetetraeder. Daher entsprechen (nach Satz 20) alle Raumkurven 3. Ordnung, welche $ORPS$ zum Schmiegungetetraeder haben oder dem Bündel $|ORPS|$ angehören, sich selbst.

Ebenso müssen alle in sich selbst übergehenden kubischen Raumkurven eins der Haupttetraeder $ORPS$ zum Schmiegungetetraeder haben. Da es nun ∞^2 solcher Tetraeder giebt, während wir ∞^4 sich selbst entsprechende kubische Raumkurven haben, so vermuten wir, dass alle

kubischen Raumkurven, welche in einem der Bündel $|ORPS|$ enthalten sind, in sich selbst transformiert werden. Diese Vermutung bestätigt sich; denn für alle Haupttetraeder wird die Doppelgleichung:

$$\lambda_{\omega\rho} = \lambda_{\sigma\pi} = \lambda_{\rho\sigma}$$

befriedigt. Wenn die Punkte O und P reell sind, so sind die zugehörigen Kurven imaginär, weil auf einer reellen, sich selbst entsprechenden rationalen Kurve, die cyklisch projektive Punktreihen trägt, (nach Satz 3) keine reellen sich selbst entsprechenden Punkte liegen können.

Jeder von unseren Bündeln kubischer Raumkurven wird aus jedem der auf denselben liegenden Punkte O und P durch einen Büschel in sich selbst übergehender Kegel projiziert. Wir gewinnen so jedoch nur ∞^1 Büschel sich selbst entsprechender Kegel; alle Kegel nämlich, welche denselben Scheitel O haben, berühren, wie wir uns leicht überzeugen können, entweder in den Kanten OR und OS die Ebenen Ov und ρ oder in den Kanten OS und OP die Ebenen Ov und σ , und bilden daher 2 Büschel. Von diesen ∞^2 Kegeln werden durch 2 beliebige Punkte X_1 und Y_1 2 festgelegt. Durch die Punkte X_1 und Y_1 lässt sich ja eine von unsern kubischen Raumkurven konstruieren, und diese wird aus jedem der auf ihr liegenden Punkte O und P der Geraden u durch einen solchen Kegel projiziert, welcher also die Punkte X_1 und Y_1 enthält. Die Kegel sind alle imaginär; denn im einen Falle sind die Scheitel imaginär, und, wenn die Scheitel auch reell sind, so können die Kegel doch nicht reell sein, da sie in einer reellen Kante, OP , eine der imaginären Ebenen ρ und σ berühren müssen.

Wir haben folgende Resultate gewonnen:

Unsere Kollineation lässt alle kubischen Raumkurven eines Systems 4. Stufe unverändert; dieselben erfüllen alle Bündel $|ORPS|$, wenn O und P die Gerade v durchlaufen. Jede dieser Kurven wird aus jedem der auf ihr befindlichen,

sich selbst entsprechenden Punkte durch einen imaginären Kegel 2. Grades projicirt. Diese Kegel, deren Scheitel also alle auf u liegen, bilden 2 Systeme von je ∞^1 Büscheln. Die Kegel des ersten Systems berühren die Ebene ρ in der Kante u und die Gerade v in dem Punkte R , die des zweiten Systems berühren die Ebene σ in der Kante u und die Gerade v in dem Punkte S .

$$T_5 = (A_1 A_2 A_3) (A_4 A_5).$$

§ 13. Wir sehen sofort, dass

$$T_5^6 = T_1$$

ist, d. h. alle Elemente des Raumes bilden zu je sechs einen Cyklus. Weiter ist

$$T_5^2 = (A_3 A_2 A_1) (A_4) (A_5) = T_4,$$

wenn wir von der Umstellung der eine gleiche Rolle spielenden Punkte A_1, A_2, A_3 absehen, und

$$T_5^3 = (A_1) (A_2) (A_3) (A_4 A_5) = T_2.$$

Daraus folgt, dass alle Elemente und Gebilde, welche durch die Transformation T_4 nicht verändert werden, und nur diese, sich im jetzigen Falle zu je zweien involutorisch entsprechen, und dass die sich in der involutorischen Homologie selbst entsprechenden Elemente und Gebilde, und nur diese, sich zu je dreien zu einem Cyklus gruppieren.

Um nachher die Resultate, welche wir für die Kollineationen T_2 und T_4 gewonnen haben, zur Herleitung von Sätzen bei der vorliegenden Transformation bequemer verwenden zu können, richten wir die Bezeichnung der Doppelselemente so ein, dass sie mit der Bezeichnung der entsprechenden Doppelselemente der Kollineationen T_2 und T_4 übereinstimmt. Wir nennen z. B. die Ebene $A_1 A_2 A_3$, wie bei T_2 und T_4 , wieder ω ; dieselbe entspricht sich selbst und enthält (nach Satz 5) kollineare Felder in Tripellage, weil die Punkte A_1, A_2, A_3 einen Cyklus bilden. Die Gerade $A_4 A_5$, die wir mit u bezeichnen, ist eine Doppelgerade

und trägt involutorische Punktreihen, da die Punkte A_4 und A_5 in einander übergehen. Der Punkt $P = u\omega$ ist sowohl für u als für ω ein reeller Doppelpunkt. Der andere Doppelpunkt O auf u ist der vierte harmonische Punkt zu P in bezug auf A_4 und A_5 . In der Ebene ω giebt es noch eine, nicht durch P gehende, und also zu u windschiefe, reelle Doppelgerade v . Dieselbe enthält konjektive Punktreihen in Tripellage mit den konjugiert imaginären Doppelpunkten R und S . Die Verbindungsebenen $Ru = \sigma$ und $Su = \varrho$ sind die konjugiert imaginären Doppelsebenen der cyklischen Ebeneninvolution 3. Ordnung um u , welche zu der cyklischen Punktinvolution auf v perspektiv ist. Mit den Feldern in ω sind die Bündel um O perspektiv, so dass diese sich auch in Tripellage befinden; der reelle Doppelstrahl ist u , die reelle Doppelebene $Ov = \pi$. Die kollinearen Felder in dieser Ebene sind in der allgemeinen Sextupellage. Da nämlich die Transformation T_5^6 alle Punkte des Raumes unverändert lässt, so wäre nur Identität, involutorische oder Tripellage der Felder möglich. Die beiden ersten Fälle sind ausgeschlossen, weil sich auf der in π gelegenen Geraden v eine cyklische Involution 3. Ordnung ergeben hat. Wären ferner die Felder in Tripellage, so müsste die Ebene π bei der Kollineation T_5^3 oder $T_2 = (A_1)(A_2)(A_3)(A_4A_5)$ identische Felder tragen, was auch unmöglich ist, da nur die Felder in der Ebene ω dort sich decken. Demnach haben wir folgende Resultate:

Die kollinearen Räume befinden sich in Sextupellage; sie besitzen 2 zu einander windschiefe, reelle Doppelgeraden u und v ; u trägt involutorische Punktreihen mit 2 reellen Doppelpunkten O und P . Zu diesen Punktreihen liegen die Ebenenbüschel um v perspektiv; letztere sind also auch involutorisch und enthalten 2 reelle, durch O und P bezüglich gehende Doppelebenen π und ω . Die Ebenenbüschel um u und die zu denselben perspectiven Punktreihen auf v bilden cyklische Involutionen 3. Ordnung; erstere besitzen daher 2 kon-

jugiert imaginäre Doppelebenen ϱ und σ und diese schneiden in v die konjugiert imaginären Doppelpunkte S und R bezüglich ein. In der Ebene $\omega = vP$ haben wir Tripellage der kollinearen Felder, in der Ebene $\pi = vO$ Sextupellage.

Weil wir auf ∞^3 Weisen eins der ∞^2 Tripel in der Ebene ω mit einem der ∞^1 Dupel auf der Geraden u kombinieren können, so ist (nach Satz 21) die Mannigfaltigkeit der Kollineationen von der Art der vorliegenden ∞^{12} .

§ 14. Die Invarianten λ müssen die Gleichung

$$\lambda^6 = +1$$

erfüllen. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $\pm 1, \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i\sqrt{3})$. Der Wert $+1$ ist ausgeschlossen, weil eine Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte im allgemeinen keine Kante des Haupttetraeders $OPRS$ schneidet. Weil die Büschel um v involutorisch sind, so ist

$$\lambda_{\omega\pi} = \lambda_{\pi\omega} = -1,$$

und da die Bündel um O sich in Tripellage befinden, also auch die Büschel um OP, OR, OS , so genügen die Invarianten $\lambda_{\varrho\sigma}, \lambda_{\sigma\varrho}, \lambda_{\pi\sigma}, \lambda_{\sigma\pi}, \lambda_{\pi\varrho}, \lambda_{\varrho\pi}$ der Gleichung

$$\lambda^3 = +1$$

und haben mithin die Werte $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$. Die übrigen Invarianten $\lambda_{\omega\varrho}, \lambda_{\varrho\omega}, \lambda_{\omega\sigma}, \lambda_{\sigma\omega}$ sind primitive sechste Einheitswurzeln, und erhalten daher die Werte $\frac{1}{2}(+1 \pm i\sqrt{3})$. Es ist z. B.

$$\lambda_{\pi\varrho} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}),$$

und die reciproke Invariante

$$\lambda_{\varrho\pi} = \frac{1}{2}(-1 \mp i\sqrt{3}).$$

Nun bestehen wieder die Beziehungen

$$\lambda_{\pi\varrho} = \lambda_{\omega\varrho} : \lambda_{\omega\pi}, \lambda_{\varrho\sigma} = \lambda_{\omega\sigma} : \lambda_{\omega\varrho}, \lambda_{\sigma\pi} = \lambda_{\omega\pi} : \lambda_{\omega\sigma}.$$

Aus der ersten derselben ergibt sich

$$\lambda_{\omega\varrho} = \frac{1}{2}(+1 \mp i\sqrt{3}), \lambda_{\varrho\omega} = \frac{1}{2}(+1 \pm i\sqrt{3}).$$

Daraus folgt, da $\lambda_{\omega\varrho}$ und $\lambda_{\omega\sigma}$ konjugiert imaginäre Werte haben müssen,

$$\lambda_{\omega\sigma} = \frac{1}{2}(+1 \pm i\sqrt{3}), \lambda_{\sigma\omega} = \frac{1}{2}(+1 \mp i\sqrt{3}).$$

Weiter liefert die zweite Relation

$$\lambda_{\rho\sigma} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{1 \mp i\sqrt{3}} = \frac{(1 \pm i\sqrt{3})^2}{(1 \mp i\sqrt{3})(1 \pm i\sqrt{3})} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}),$$

$$\lambda_{\sigma\rho} = \frac{1}{2}(-1 \mp i\sqrt{3}),$$

und die letzte

$$\lambda_{\sigma\pi} = \frac{-1}{\frac{1}{2}(+1 \pm i\sqrt{3})} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}),$$

$$\lambda_{\pi\sigma} = \frac{1}{2}(-1 \mp i\sqrt{3}).$$

Wenn wir die gefundenen Werte mit einander vergleichen, so finden wir, dass ein Wechsel des Vorzeichens gleichbedeutend mit einer Vertauschung der konjugiert imaginären Punkte R und S ist. Daher dürfen wir uns auf das obere Vorzeichen beschränken, und dann haben wir

$$\lambda_{\omega\pi} = \lambda_{\pi\omega} = -1,$$

$$\lambda_{\pi\rho} = \lambda_{\sigma\pi} = \lambda_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \lambda_{\omega\rho} = \lambda_{\sigma\omega} = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}),$$

$$\lambda_{\pi\sigma} = \lambda_{\rho\pi} = \lambda_{\sigma\rho} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}), \lambda_{\omega\sigma} = \lambda_{\rho\omega} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

Die Invarianten der jetzigen Transformation, die wir für einen Augenblick mit λ_5 bezeichnen wollen, müssen (nach Satz 10) mit den entsprechenden Invarianten λ_2 und λ_4 der Transformationen $T_2 = (A_1)(A_2)(A_3)(A_4A_5)$ und $T_4 = (A_1A_2A_3)(A_4)(A_5)$ bezüglich durch die Gleichungen

$$\lambda_5^3 = \lambda_2, \quad \lambda_5^2 = \lambda_4$$

verbunden sein. Setzen wir die betreffenden Werte ein, so zeigt sich, dass diese Gleichungen in der That richtig sind.

Für die Invariante $\mathcal{A}$ bekommen wir

$$\mathcal{A} = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}} : \frac{1 + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \cdot \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{4i\sqrt{3}}{-4i\sqrt{3}},$$

$$\mathcal{A} = -1.$$

§ 15. Zwei Punkte, welche in der Kollineation T_2 gepaart sind, gehören bei der jetzigen Transformation zu derselben Gruppe, und ihre Zeiger unterscheiden sich um 3. Daraus ergibt sich:

Je 2 Punkte eines Sextupels, deren Zeiger sich um 3 unterscheiden, haben eine durch O gehende Verbindungslinie und werden durch O und ω harmonisch getrennt.

Da ferner die Transformation $T_4 = (A_1 A_2 A_3) (A_4) (A_5)$ die Ebenen durch v unverändert lässt, so liegen von jedem Cyklus (X) die Punkte X_1, X_3, X_5 in einer Ebene ε_1 durch v , und die Punkte X_2, X_4, X_6 in der gepaarten Ebene ε_2 .

In den Ebenen ω und π haben wir (nach Satz 7) je einen Büschel sich selbst entsprechender Kegelschnitte. In der Ebene ω sind es diejenigen, welche die konjugiert imaginären Geraden PR und PS in den konjugiert imaginären Punkten R und S berühren, in der Ebene π diejenigen, welche die Geraden OR und OS in R und S berühren. Ebenso erhalten wir 2 Büschel sich selbst entsprechender Kegel, welche die beiden Kegelschnittbüschel aus O resp. P projicieren. Die Kegel des ersten Büschels berühren die Ebenen ϱ und σ in den Kanten OS und OR , die des zweiten in den Kanten PS und PR .

Denken wir uns den Satz 8 auf den Bündel um den Punkt O übertragen. $X_1, X_2 \dots X_6$ seien die Punkte irgend eines Sextupels, so gehen die Ebenen

$PX_1X_1, PX_2X_6, PX_3X_5, PX_4X_4$	durch eine Gerade a_1	des Büschels (P, ω) ,
$PX_2X_2, PX_3X_1, PX_4X_6, PX_5X_5$	„ „ „ „ a_2	„ „ „
$PX_3X_3, PX_4X_2, PX_5X_1, PX_6X_6$	„ „ „ „ a_3	„ „ „
$PX_1X_2, PX_6X_3, PX_5X_4$	„ „ „ „ b_1	„ „ „
$PX_2X_3, PX_1X_4, PX_6X_5$	„ „ „ „ b_2	„ „ „
$PX_3X_4, PX_2X_5, PX_1X_6$	„ „ „ „ b_3	„ „ „

Die Geraden a_1, a_2, a_3 sowie b_1, b_2, b_3 bilden offenbar je ein Tripel, wie man aus den sie bestimmenden Ebenen ersieht. Also:

Die Verbindungsebenen des Punktes P mit je 2 Punkten einer Gruppe $\mathfrak{S}(X)$, für welche die Summe der Zeiger mit einer gegebenen Zahl nach dem Modul 6 kongruent ist, schneiden sich in einer Geraden des Büschels (P, ω) ; dabei haben wir z. B. unter der Ebene PX_1X_1 die Tangentialebene

an den sich selbst entsprechenden Kegel mit dem Scheitel P , welcher durch die Punkte $X_1, X_2 \dots X_6$ geht, in der Kante PX_1 zu verstehen. Auf diese Weise erhalten wir zu jedem Sextupel von Punkten 6 Geraden, welche 2 Tripel bilden.

Ein analoges Resultat ergibt sich für den Punkt O . Da jedoch die Punkte eines Sextupels dreimal zu je zweien auf einer Geraden durch O liegen, so sind die Verbindungsebenen des Punktes O mit je zweien derselben nicht alle verschieden; es ist

$$\begin{aligned} OX_1X_1 &\equiv OX_4X_4 \equiv OX_1X_4, & OX_2X_2 &\equiv OX_5X_5 \equiv OX_2X_5, \\ OX_3X_3 &\equiv OX_6X_6 \equiv OX_3X_6, \\ OX_1X_2 &\equiv OX_4X_5 \equiv OX_1X_5 \equiv OX_2X_4, \\ OX_2X_3 &\equiv OX_5X_6 \equiv OX_2X_6 \equiv OX_3X_5, \\ OX_3X_4 &\equiv OX_1X_3 \equiv OX_4X_6 \equiv OX_1X_6. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Geraden, welche wir hier bekommen, mit denselben Buchstaben bezüglich, wie beim Bündel P , so zeigt sich, dass

$$a_1 \equiv b_2, \quad a_2 \equiv b_3, \quad a_3 \equiv b_1$$

ist. Demnach erhalten wir in dem Büschel (O, π) zu jedem Punktsextupel nur 3 Konkurrenzstrahlen, welche ein Tripel bilden.

Aus der Thatsache, dass

$$T_3^3 = (A_1)(A_2)(A_3)(A_4A_5) = T_2$$

ist, und aus dem Umstande, dass 2 Geraden, welche in der Kollineation T_2 gepaart sind, einen in ω liegenden Schnittpunkt und eine durch O gehende Verbindungslinie haben und zu O und ω harmonisch sind, ergibt sich der Satz:

Je 2 Geraden eines Geradensextupels (x) , deren Zeiger sich um 3 unterscheiden, liegen in einer Ebene durch O , schneiden sich in einem Punkte von ω und sind harmonisch zu O und ω . Zu jedem Geradensextupel erhalten wir auf diese Weise 3 Punkte eines Tripels in der Ebene ω und 3 Ebenen eines Tripels durch den Punkt O .

Im allgemeinen sind zwei benachbarte Geraden eines Geradensextupels zu einander windschief. Ist jedoch x_1

eine Gerade des Reyeschen Komplexes unserer Kollineation, d. h. ist sie die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte, so bildet das durch x_1 bestimmte Sextupel ein windschiefes Sechseck. In einem solchen Geraden-sextupel befinden sich demnach folgende 9 Paare sich schneidender Geraden: (x_1, x_2) , (x_2, x_3) , (x_3, x_4) , (x_4, x_5) , (x_5, x_6) , (x_6, x_1) , (x_1, x_4) , (x_2, x_5) , (x_3, x_6) . Wir sehen, dass jede der Geraden x_1, x_3, x_5 von jeder der Geraden x_2, x_4, x_6 getroffen wird. Daher werden durch die Geraden x_1, x_3, x_5 und x_2, x_4, x_6 die beiden Regelscharen einer Fläche 2. Grades F_2 bezüglich festgelegt, welche durch die Transformation T_5 auf die zweite Art in sich selbst übergeführt wird. Auf jeder solchen Fläche F^2 liegen ja ∞^1 Geraden. Ist y_1 eine dieser Geraden, so liegen auch $y_2, y_3, \dots, y_6$ auf der Fläche, und zwar so, dass y_1, y_3, y_5 der einen, y_2, y_4, y_6 der andern Schar angehören. Die Gerade y_1 verbindet demnach die entsprechenden Punkte y_6y_1 und y_1y_2 . Ähnliches gilt von jeder Geraden der Fläche F^2 , welche mithin ∞^1 Verbindungslinien entsprechender Punkte enthält. Da andererseits im ganzen Raum deren ∞^3 vorhanden sind, so giebt es ∞^2 auf diese Weise in sich selbst übergehende Flächen 2. Grades.

Der Reyesche Komplex, welchen die Kollineation T_5 erzeugt, besteht aus ∞^2 Dupeln von Regelscharen. Die beiden Scharen eines solchen Dupels entsprechen sich in beiderlei Sinn der Beziehung und liegen auf derselben Fläche 2. Grades, welche also auf die zweite Art in sich selbst transformiert wird.

Auf die genauere Betrachtung dieser Flächen werden wir bald zurückkommen.

Eine Gerade x_1 , welche u in einem Punkte U_1 trifft, gehört zu einem Sextupel von folgender Beschaffenheit. Die 3 Geraden x_1, x_3, x_5 , gehen durch den Punkt U_1 , die Geraden x_2, x_4, x_6 durch den diesem gepaarten Punkt U_2 auf u ; die Ebenen x_1x_4, x_2x_5, x_3x_6 sind die Ebenen eines

Tripels durch u . Das Duale gilt für die Sextupel von Geraden, welche v begegnen.

Schneidet die Gerade u und v in den Punkten U_1 bezüglich V_1 , so sind die Geraden des Sextupels alle Verbindungslinien eines Punktes des Paares (U_1, U_2) auf u mit einem Punkte des Tripels (V_1, V_2, V_3) auf v , nämlich $U_1V_1, U_2V_2, U_1V_3, U_2V_1, U_1V_2, U_2V_3$.

§ 16. Wenden wir uns zur Untersuchung der Gebilde, welche sich involutorisch entsprechen, also denjenigen, welche die Transformation $T_4 = (A_1A_2A_3)(A_4)(A_5)$ nicht verändert.

Die Kegelschnitte eines räumlichen Bündels, welche durch R und S gehen und in diesen Punkten die Ebenen σ und ϱ berühren, entsprechen sich zu je zweien in beiderlei Sinn der kollinearen Beziehung, da sie alle durch die Transformation T_4 in sich selbst verwandelt werden. Denjenigen in einer durch v gehenden Ebene ε_1 sind die Kegelschnitte des in der gepaarten Ebene ε_2 befindlichen Büschels zugeordnet.

Durch die Transformation T_4 gingen ferner alle Flächen 2. Grades eines in sich dualen, linearen Systems 3. Stufe auf die erste Art in sich selbst über. Waren nämlich U und U' 2 beliebige Punkte auf u , so fielen alle Flächen des Büschels $|URU'S|$ mit ihren entsprechenden zusammen. Daher muss hier jeder solchen Fläche eine andere auf die erste Art involutorisch entsprechen. Eine Fläche, welche das Vierseit $U_1RU_1'S$ enthält, wird in eine Fläche durch das Vierseit $U_2RU_2'S$ übergeführt, bei dem die Punkte U_2 und U_2' den U_1 und U_1' bezüglich in der Involution auf u gepaart sind. Also den Flächen eines jeden Büschels $|U_1RU_1'S|$ sind die Flächen eines andern Büschels $|U_2RU_2'S|$ involutorisch zugeordnet. Lassen wir die Punkte U und U' die ganze Gerade u durchlaufen, so ergeben sich nach und nach ∞^2 Paare von entsprechenden Büscheln.

Fassen wir eine Fläche F_1^2 irgend eines dieser Büschel ins Auge. Da dieselbe die Ebenen $Ru = \sigma$ und $Su = \varrho$ in

R und S bezüglich berührt, so tangieren die Kegelschnitte, welche die Ebenen ω und π aus ihr ausschneiden, die Linien PR und PS resp. OR und OS in den Punkten R und S . Von diesen Kegelschnitten wissen wir, dass sie in sich selbst verwandelt werden. Deshalb muss auch die der F_1^2 entsprechende Fläche F_2^2 durch die beiden Kegelschnitte hindurchgehen. Das Kegelschnittepaar ist die Grundkurve eines Flächenbüschels, welcher involutorisch in sich selbst transformiert wird, weil die beiden Flächen F_1^2 und F_2^2 in einander übergehen. Demnach befinden sich die ∞^3 Flächen unseres Systems zu je ∞^1 in einem Büschel, welcher 2 sich selbst entsprechende Kegelschnitte in den Ebenen ω und π als Basiskurve hat, und dessen Elemente involutorisch gepaart sind. Da wir auf ∞^2 Weisen einen Kegelschnitt des Büschels in der Ebene ω mit einem des Büschels in der Ebene π kombinieren können, so vermuten wir, dass jeder Flächenbüschel, welcher 2 solche Kegelschnitte zur Grundkurve hat, aus involutorisch gepaarten Flächen besteht. Dies bestätigt sich; denn einerseits wird ein solcher Büschel B in sich selbst verwandelt, weil die Grundkurve sich selbst entspricht, und andererseits findet involutorische Paarung statt, weil die Flächen dieses Büschels durch die Transformation $T_4 = (A_1 A_2 A_3) (A_4) (A_5)$ nicht verändert werden. Es wäre noch der Fall möglich, dass die Flächen des Büschels B alle in sich selbst übergängen; dann könnten sie aber auch durch die Transformation $T_2 = (A_1) (A_2) (A_3) (A_4 A_5)$ nicht verändert werden, was undenkbar ist, da die Flächen im allgemeinen O und ω nicht zu Pol und Polarebene haben. Es giebt in dem Büschel B nur eine Fläche, für welche O und ω Pol und Polarebene sind. Dieselbe geht durch das einzige Punktepaar (U_1, U_2) , welches zu O und P harmonisch ist und zugleich der durch den Flächenbüschel auf u hervorgerufenen Involution angehört. Diese Fläche ist das eine Doppelement der Flächeninvolution; das andere Doppelement ist durch das Ebenen-

paar (ω, π) vertreten, welches allen Büscheln gemeinsam zukommt.

§ 17. Die erste sich selbst entsprechende Fläche des Büschels B kann die Ebenen ω und π je nur in einem Kegelschnitt durchdringen, und mithin nur in einer von den ∞^2 Flächeninvolutionen enthalten sein. Demnach giebt es im ganzen ∞^2 derartige Flächen, welche alle eins der Vierseite RU_1SU_2 enthalten, wenn (U_1, U_2) die Involution auf der Geraden u mit den Doppelpunkten O und P durchläuft. Diese Flächen werden folglich (nach Satz 17) auf die zweite Art in sich selbst transformiert. Es sind dieselben, zu denen wir oben (§ 15) bei der Betrachtung des Reyeschen Komplexes schon gelangt sind. Es scheint auffallend, dass die Elemente der Flächeninvolutionen auf die erste Art involutorisch gepaart sind, während die Doppelflächen derselben auf die zweite Art sich selbst entsprechen. Beides widerspricht sich nicht, da in jedem Falle durch die Kollineation T_5^2 jede Regelschar in sich selbst übergeht. Der Unterschied liegt darin, dass 2 in der Kollineation T_5 gepaarte Regelscharen sich im allgemeinen auf verschiedenen Flächen, bei den Doppelementen der Involutionen dagegen auf derselben Fläche befinden.

Dass alle Flächen 2. Grades, welche durch R und S gehen, und für welche sowohl O und ω als auch P und π Pol und Polarebene sind, auf die zweite Art in sich verwandelt werden, bestätigen uns die Invarianten; es ist nämlich

$$\lambda_{\omega\pi} = -1, \quad \lambda_{\rho\omega} = -\lambda_{\pi\sigma}.$$

Da alle diese Flächen in den Punkten R und S die Ebenen $Ru = \sigma$ und $Su = \rho$ berühren, so durchdringen sich je 2 derselben in einem Paar von Kegelschnitten, welche ebenfalls in den Punkten R und S die Ebenen σ und ρ berühren. Das Paar dieser Kegelschnitte muss durch die Transformation T_5 in sich selbst übergeführt werden. Es können aber keine sich selbst entsprechenden Kegelschnitte

in den Ebenen ω und π sein, weil durch jedes beliebige Paar solcher Kegelschnitte nur eine sich selbst entsprechende Fläche hindurchgeht, wie wir gesehen haben. Daher sind es gepaarte Kegelschnitte in zugeordneten Ebenen der Involution um v . Aber auch alle Büschel von Flächen 2. Grades, welche ein derartiges Kegelschnittepaar (K_1^2, K_2^2) zur Grundkurve haben, enthalten lauter sich selbst entsprechende Flächen. Der Kegelschnitt K^2 wird nämlich, weil er die Ebenen ϱ und σ in S und R berührt, aus O und P durch 2 Kegel projiciert, welche die Ebenen ϱ und σ in den Kanten OS und OR resp. PS und PR tangieren. Da wir von diesen Kegeln erkannt haben, dass sie sich selbst entsprechen, so enthalten beide auch den dem K_1^2 gepaarten Kegelschnitt K_2^2 . Nunmehr wissen wir von 3 Flächen des Büschels mit der Basiskurve (K_1^2, K_2^2) , dass sie in sich selbst verwandelt werden, nämlich von den beiden Kegeln und dem Paar der Ebenen, in denen die Kegelschnitte K_1^2 und K_2^2 liegen. Daher entsprechen alle Elemente des Büschels sich selbst.

Wir haben folgende Resultate:

Greifen wir aus jedem der beiden Büschel sich selbst entsprechender Kegelschnitte in den Ebenen ω und π einen Kegelschnitt heraus, so wird durch dieselben ein Büschel von Flächen 2. Grades bestimmt, welche paarweise auf die erste Art involutorisch in einander transformiert werden. Auf diese Weise erhalten wir nach und nach ∞^2 Büschel mit involutorisch gepaarten Flächen, welche ein in sich duales, lineares System 3. Stufe bilden. Alle diese Büschel enthalten das Ebenenpaar (ω, π) , welches die Stelle eines Doppelementes vertritt. Die zweiten sich selbst entsprechenden Flächen dieser Büschel erfüllen ein in sich duales, lineares System 2. Stufe von Flächen 2. Grades, welche auf die zweite Art in sich selbst übergeführt werden. Alle in dem letztern System sich vorfindenden Büschel haben 2 sich involutorisch entsprechende Kegelschnitte in gepaarten Ebenen der Involu-

tion um v zur Grundkurve; umgekehrt gehören alle Büschel, welche ein derartiges Kegelschnittepaar als Grundkurve besitzen, dem System an.

Die ∞^2 Bündel kubischer Raumkurven, welche die Transformation $T_4 = (A_1 A_2 A_3) (A_4) (A_5)$ nicht verändert, entsprechen sich in der jetzigen Kollineation zu je zweien involutorisch, so dass jeder Kurve eines dieser Bündel eine Kurve des gepaarten Bündels in beiderlei Sinn der Beziehung korrespondiert. Einem Bündel $|U_1 R U'_1 S|$ entspricht der Bündel $|U_2 R U'_2 S|$, wenn (U_1, U_2) und (U'_1, U'_2) 2 Paare der Involution auf u sind. Fallen die Punkte U_1 und U'_1 in O und P , so ergibt sich ein Bündel mit involutorisch gepaarten Kurven.

Das System der imaginären Kegel, welche die Raumkurven 3. Ordnung aus ihren Schnitten mit u projicieren, ist hier selbstverständlich auch involutorisch.

Sich selbst entsprechende kubische Raumkurven können nicht existieren, da bei der Transformation $T_2 = (A_1) (A_2) (A_3) (A_4 A_5)$ keine vorhanden sind.

§ 18. Betrachten wir die Flächen 2. Grades, welche sich in der Kollineation T_2 selbst entsprechen, und welche also im jetzigen Falle zu je dreien einen Cyklus bilden. Es sind dies die ∞^6 Flächen, welche O und ω zu Pol und Polarebene haben. Fassen wir die 3 Flächen F_1^2, F_2^2, F_3^2 irgend eines solchen Tripels ins Auge. Da O und ω für die Fläche F_1^2 Pol und Polarebene sind, so schneidet dieselbe die Gerade u in 2 zu O und P harmonischen Punkten U_1 und U_2 . Diese Punkte liegen, weil sie gepaart sind, auch auf den Flächen F_2^2 und F_3^2 . Die übrigen 6 Schnitte der 3 Flächen bilden ein Sextupel; denn die Gruppe derselben wird in sich selbst transformiert. Verbinden wir O mit einem dieser Punkte, so liegt ja auch der vierte harmonische Punkt zu diesem in bezug auf O und ω , welcher, wie wir gefunden, demselben Sextupel angehört, auf allen 3 Flächen. Umgekehrt befindet sich auch

jede Fläche 2. Grades, welche durch die 6 Punkte eines Sextupels (X) gelegt ist, in einem unserer Flächentripel; denn, da die Punktpaare (X_1, X_4) , (X_2, X_5) , (X_3, X_6) bezüglich zu O und ω harmonisch sind, so sind O und ω Pol und Polarebene derselben. Auf jeder dieser Flächen liegt im allgemeinen nur ein Sextupel. Indem wir nun die ∞^3 Sextupel des Raumes mit den ∞^1 Paaren der Involution auf u kombinieren, erhalten wir nach und nach ∞^4 Bündel von Flächen 2. Grades, welche das System 6. Stufe erfüllen. Es leuchtet nämlich sofort ein, dass die 6 Punkte eines beliebigen Sextupels (X) und die 2 Punkte eines beliebigen Paares (U) der Involution auf u 8 associierte Punkte sind; denn da eine beliebige durch die 7 Punkte $X_1, X_2 \dots X_6, U_1$ gelegte Fläche 2. Grades O und ω zu Pol und Polarebene hat, so muss dieselbe auch durch den vierten zu U_1 in bezug auf O und ω harmonischen Punkt U_2 gehen. Die Flächen jedes dieser Bündel werden zu je dreien cyklisch in einander transformiert, und zwar auf die zweite Art.

Unter den Flächen, welche sich zu Tripeln gruppieren, befindet sich auch das System 2. Stufe der auf die zweite Art in sich selbst übergehenden Flächen 2. Grades; denn jede derselben hatte ja O und ω zu Pol und Polarebene. Also:

Die ∞^6 Flächen 2. Grades, welche durch die ∞^3 Sextupel des Raumes gelegt werden können, bilden zu je dreien einen Cyklus zweiter Art. Die Flächen eines Tripels schneiden sich in den 6 Punkten eines Sextupels und in 2 Punkten eines Paares der Involution auf u ; sie befinden sich zu je ∞^2 in einem Bündel, welcher 8 derartige Punkte zu Grundpunkten hat. In diesem System sind die ∞^2 Flächen, welche auf die zweite Art in sich selbst transformiert werden, enthalten.

Die 6 Punkte eines beliebigen Sextupels und die 2 Punkte eines beliebigen Paares der Involution auf u sind 8 associierte Punkte.

$$T_6 = (A_1 A_2 A_3 A_4) (A_5).$$

§ 19. Es zeigt sich, dass

$$T_6^4 = T_1$$

ist; demnach haben wir kollineare Räume in Vierecks- oder Quadrupellage. Ferner ist:

$$T_6^2 = (A_1 A_3) (A_2 A_4) (A_5) = (A_1 A'_2) (A'_3 A_4) (A_5) = T_3,$$

wenn $A'_2 \equiv A_3, A'_3 \equiv A_2$ ist. Die Transformation T_6^2 stimmt also im wesentlichen mit der Transformation T_3 überein, welche ein geschart involutorisches System ergab. Daraus folgt:

Durch zweimalige Anwendung der vorliegenden Transformation erhalten wir ein geschart involutorisches System, in dem sich also je 2 gegenüberliegende Ecken eines Vierecks der jetzigen Kollineation entsprechen.

Wir wollen der Einfachheit halber die reellen Doppelgeraden und die auf ihnen bezüglich liegenden Doppelpunkte wieder so bezeichnen, wie bei der Kollineation T_3 . Den Punkt A_5 , welcher in sich selbst übergeht, nennen wir O . Die Ebenen OA_1A_3 und OA_2A_4 entsprechen sich in beiderlei Sinn der Beziehung. Daher ist die Schnittlinie u derselben eine Doppelgerade. Die Ebenenbüschel um u , sowie die Punktreihen auf u sind involutorisch, da sowohl die Ebenen OA_1A_3 und OA_2A_4 , als auch die Schnittpunkte von u mit den Geraden A_1A_3 und A_2A_4 bezüglich in einander übergehen. Der eine Doppelpunkt der Involution auf u ist O , der andere, P , ist der vierte harmonische Punkt zu O in bezug auf die Punkte (u, A_1A_3) und (u, A_2A_4) . Der Bündel um O , welcher cyklisch kollinear auf sich selbst bezogen ist, besitzt ausser der Doppelgeraden u eine nicht durch u gehende, reelle Doppelebene π (nach Satz 6); ebenso giebt es durch P eine reelle, u nicht enthaltende Doppel Ebene ω . Die Schnittlinie $\omega\pi = v$ ist daher eine zweite, zu u windschiefe, reelle Doppelgerade. Die Ebenenbüschel um v und die Punktreihen auf v sind perspektiv zu den

Punktreihen auf u und den Ebenenbüscheln um u , also ebenfalls involutorisch. Die Doppelpunkte R und S auf v sind konjugiert imaginär; denn wären sie reell, so wären die Felder in den Ebenen ω und π involutorisch, da kollineare Felder in Quadrupellage (nach Satz 6) nur einen reellen Doppelpunkt enthalten; daraus würde aber involutorische Lage der kollinearen Räume folgen: einer beliebigen Ebene nämlich, welche die beiden Ebenen ω und π in den Geraden g_1 und l_1 schneidet, würde in beiderlei Sinn der Beziehung die Verbindungsebene der zu jenen gepaarten Geraden, g_2 und l_2 , entsprechen. Durch R und S gehen die, ebenfalls konjugiert imaginären Doppelebenen σ bezüglich ϱ der Involution um u . Wir haben folgendes Resultat:

Es giebt 2 reelle, zu einander windschiefe Doppelgeraden u und v , welche involutorische Punktreihen und Ebenenbüschel tragen. Die Punktreihen auf u haben 2 reelle Doppelpunkte O und P ; ebenso enthalten die dazu perspektiven Ebenenbüschel um v 2 durch O und P gehende, reelle Doppelebenen π und ω . Die Doppelebenen ϱ und σ durch u , sowie die in denselben liegenden Doppelpunkte S und R auf v sind je konjugiert imaginär.

Wir können auf ∞^3 Weisen ein Quadrupel und einen sich selbst entsprechenden Punkt der Kollineation T_6 wählen. Daraus folgt (nach Satz 21), dass die Mannigfaltigkeit der Kollineationen in Quadrupellage ∞^{12} ist.

Die vorliegende Kollineation ist von Herrn H. Schröter in einer Abhandlung: „Über cyklisch projektive Punktquadrupel in 2 kollinearen Räumen“¹⁾ untersucht. Der Ausgangspunkt des Herrn Schröter ist etwas allgemeiner, als der unsere. Er betrachtet die Kollineation, durch welche 4 Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 cyklisch in einander übergeführt werden und einem fünften Punkte A_5 ein anderer Punkt

1) Math. Ann., Bd. 20, S. 331 ff.

A'_5 entspricht, während wir A_5 und A'_5 als identisch vorausgesetzt haben. Die Kollineation des Herrn Schröter ist dennoch nicht wesentlich allgemeiner, als die unsere; bei derselben können die beiden Punkte O und P auch konjugiert imaginär sein, was in unserm Falle nicht möglich ist, da wir von einem derselben, nämlich $O \equiv A_5$, wissen, dass er reell ist. Herr Schröter lässt es dahingestellt, ob 2 kollineare Räume in Quadrupellage 2 reelle Doppelpunkte besitzen können¹⁾. Die Möglichkeit ist durch unsern Fall bewiesen.

§ 20. Die Invarianten λ müssen die Gleichung

$$\lambda^4 = +1$$

befriedigen. Da die Ebenenbüschel um u und v involutorisch sind, so folgt:

$$\lambda_{\omega\pi} = \lambda_{\pi\omega} = \lambda_{\rho\sigma} = \lambda_{\sigma\rho} = -1.$$

Die übrigen Invarianten sind imaginär; denn das Doppelverhältnis von 4 Punkten, von denen einer imaginär ist, kann keinen reellen Wert haben. Für dieselben gelten die Formeln

$$\lambda_{\rho\sigma} = \lambda_{\omega\sigma} : \lambda_{\omega\rho}, \lambda_{\pi\rho} = \lambda_{\omega\rho} : \lambda_{\omega\pi}, \lambda_{\sigma\pi} = \lambda_{\omega\pi} : \lambda_{\omega\sigma}.$$

Weil $\lambda_{\rho\sigma} = -1$ ist, so sehen wir aus der ersten Formel, dass $\lambda_{\omega\rho}$ und $\lambda_{\omega\sigma}$ verschiedene Werte haben, also $\pm i$ und $\mp i$. Wir können das Doppelzeichen durch geeignete Bezeichnung der konjugiert imaginären Punkte auf v vermeiden, so dass mithin

$$\lambda_{\omega\rho} = +i, \lambda_{\omega\sigma} = -i$$

wird. Dann ergibt sich weiter

$$\lambda_{\rho\omega} = -i, \lambda_{\sigma\omega} = +i, \lambda_{\pi\rho} = -i, \lambda_{\rho\pi} = +i, \lambda_{\sigma\pi} = -i, \lambda_{\pi\sigma} = +i.$$

Also

$$\begin{aligned} \lambda_{\omega\pi} &= \lambda_{\pi\omega} = \lambda_{\rho\sigma} = \lambda_{\sigma\rho} = -1, \\ \lambda_{\omega\rho} &= \lambda_{\rho\pi} = \lambda_{\pi\sigma} = \lambda_{\sigma\omega} = +i, \\ \lambda_{\rho\omega} &= \lambda_{\pi\rho} = \lambda_{\sigma\pi} = \lambda_{\omega\sigma} = -i. \end{aligned}$$

1) a. a. O., S. 240.

Wenn wir zur Kontrolle die jetzigen Invarianten λ_6 mit den Invarianten λ_3 der Kollineation $T_3 = (A_1 A_3) (A_2 A_4) (A_5)$ vergleichen, so finden wir, dass sie mit denselben durch die Gleichung

$$\lambda_6^2 = \lambda_3$$

verknüpft sind. Endlich ist

$$A = \frac{1-i}{1+i} : \frac{1+i}{1-i} = \frac{-2i}{+2i},$$

$$A = -1.$$

§ 21. Berücksichtigt man, dass die zweimalige Anwendung der Transformation T_6 zu dem oben betrachteten geschart involutorischen System führt, so ergibt sich ohne weiteres:

Die Verbindungslinien je zweier Gegenecken eines Quadrupels treffen die Geraden u und v und entsprechen sich involutorisch; wir können daher 2 solche Geraden gepaarte Geraden nennen. Umgekehrt ist jede Linie, welche u und v schneidet, für ∞^1 Quadrupel Verbindungslinie eines Paares von Gegenecken, weil sie beim geschart involutorischen System ∞^1 Paare entsprechender Punkte verbindet. Alle diese Gegeneckenpaare sind harmonisch zu den Schnitten der Geraden mit u und v .

Ausser diesen Linien giebt es keine gepaarten Geraden; denn bei der Kollineation $T_3 = (A_1 A_3) (A_2 A_4) (A_5)$ hatten wir, abgesehen von u und v , sonst keine sich selbst entsprechenden Geraden.

Die Transformation T_3 lässt alle Kegelschnitte in Ebenen durch u oder v , welche u oder v und den Schnitt der Ebene mit v oder u bezüglich zu Polare und Pol haben, unverändert. *Diese entsprechen sich im jetzigen Falle paarweise involutorisch; und zwar korrespondiert einem Kegelschnitt, der in einer Ebene durch u , welche v in V_1 schneidet, liegt, und in dieser Ebene die beiden Geraden $V_1 U_1$ und $V_1 U'_1$ in den auf u befindlichen Punkten U_1 und U'_1 berührt, ein solcher, welcher die Geraden $V_2 U_2$ und $V_2 U'_2$ in U_2 und*

U'_2 tangiert, wenn V_2, U_2, U'_2 zu V_1, U_1, U'_1 bezüglich gepaart sind. Unter diesen Kegelschnitten befinden sich auch die durch die Doppelpunkte gehenden, welche dadurch ausgezeichnet sind, dass je 2 gepaarte von ihnen sich in 2 Punkten O und P oder R und S schneiden. Die Kegelschnitte, welche die Geraden OR und OS in R und S und die, welche die Geraden PR und PS in R und S berühren, entsprechen sich selbst (nach Satz 7). Ebenso werden dual die Kegel 2. Grades durch die Kanten OR und OS , welche u und π zu Polstrahl und Polarebene haben, und diejenigen durch PR und PS , welche u und ω zu Polstrahl und Polarebene haben, in sich selbst transformiert.

Sind X_1, X_2, X_3, X_4 die Punkte irgend eines Quadrupels, so gehen (nach Satz 8), wenn wir denselben auf einen der Bündel O und P , z. B. auf O , anwenden, die Ebenen:

$OX_1X_1, OX_2X_4, OX_3X_3$	durch eine Gerade a_1 des Büschels (O, π) ,
$OX_2X_2, OX_3X_1, OX_4X_4$	„ „ „ a_2 „ „ „
OX_1X_2, OX_3X_4	„ „ „ b_1 „ „ „
OX_2X_3, OX_4X_1	„ „ „ b_2 „ „ „

Demnach gilt der Satz:

Die Verbindungsebenen des Punktes O oder P mit je 2 Punkten eines Quadrupels, deren Zeigersumme mit derselben Zahl nach dem Modul 4 kongruent ist, schneiden sich in einer Geraden des Büschels (O, π) resp. (P, ω) . Dabei ist unter der Verbindungslinie des Punktes O oder P mit 2 zusammenfallenden Punkten, z. B. X_1, X_1 , die Tangentialebene in der Kante OX_1 resp. PX_1 an den sich selbst entsprechenden, durch das Quadrupel (X) gehenden Kegel mit dem Scheitel O bezüglich P zu verstehen. Auf diese Weise erhalten wir zu jedem Punktquadrupel in jedem der Strahlbüschel (O, π) und (P, ω) 4 Geraden, welche 2 Paare von sich involutorisch entsprechenden Geraden bilden.

Die beiden Geraden $b_1 \equiv O(X_1X_2, X_3X_4)$ und $b_2 \equiv O(X_2X_3, X_4X_1)$ sind 2 Kanten des Diagonaldreikants des vollständigen Vierkants $O(X_1X_2X_3X_4)$. Die dritte Kante

desselben ist die Linie $O(X_1X_3, X_2X_4) \equiv u$. Da die Geraden b_1 und b_2 in der Ebene π liegen, so können wir sagen: *Die Gerade u und die Ebene π sind Kante und Gegenebene des Diagonaldreikants des vollständigen Vierkants, welches aus den 4 Strahlen von O nach den 4 Punkten eines beliebigen Punktquadrupels gebildet wird. Das analoge Resultat lässt sich für den Bündel P aussprechen.*

Fassen wir nun den harmonischen Kegel 2. Grades K^2 durch das Vierkant $O(X_1X_2X_3X_4)$ ins Auge, d. h. denjenigen Kegel, mit dessen sämtlichen Kanten die 4 Strahlen OX_1, OX_2, OX_3, OX_4 durch 4 harmonische Ebenen verbunden werden. Derselbe wird in den Kegel transformiert, aus dessen Kanten die 4 Geraden OX_2, OX_3, OX_4, OX_1 durch harmonische Ebenenwürfe projiziert werden. Der letztere ist mit dem ersten identisch, sodass also der harmonische Kegel durch jedes Vierkant der beschriebenen Art sich selbst entspricht.

Wir können direkt nachweisen, dass die beiden sich selbst entsprechenden Kegel K^2 und $K^{2'}$ mit den Scheiteln O und P durch ein Quadrupel (X) die harmonischen Kegel für die beiden Vierkante $O(X_1X_2X_3X_4)$ und $P(X_1X_2X_3X_4)$ bezüglich sind. Nach einem bekannten Satze hat das Doppelverhältnis der 4 Ebenen, durch welche 4 feste Kanten eines Kegels aus einer beweglichen fünften projiziert werden, einen konstanten Wert. Daher genügt es zu zeigen, dass die 4 Kanten OX_1, OX_2, OX_3, OX_4 aus einer beliebigen Kante des Kegels K^2 , aus OX_1 etwa, durch 4 harmonische Ebenen projiziert werden. Da die Gerade u der Polstrahl der Ebene π in bezug auf den Kegel K^2 ist, und die Gerade a_1 in π liegt, so sind die 4 in der Ebene OX_2X_4 befindlichen Strahlen a_1, OX_2, u, OX_4 harmonisch, also auch die 4 diese Strahlen mit OX_1 verbindenden Ebenen $OX_1(X_1, X_2, X_3, X_4)$. Gleiches kann man von den 4 Ebenen $PX_1(X_1, X_2, X_3, X_4)$ zeigen.

Daher haben wir den Satz:

Jeder von den sich selbst entsprechenden Kegeln mit den Scheiteln O und P ist der harmonische Kegel für alle Vierkante, welche gebildet werden aus den Verbindungslinien des Punktes O resp. P mit den 4 Punkten eines auf demselben liegenden Punktquadrupels.

§ 22. Die 4 Geraden x_1, x_2, x_3, x_4 eines beliebigen Geradenquadrupels können nicht einer Regelschar angehören. Wäre das nämlich der Fall, so müsste diese Regelschar cyklisch projektiv auf sich selbst bezogen sein, und also 2 konjugiert imaginäre Doppelgeraden enthalten, entweder OR und OS oder PR und PS ; das ist aber im allgemeinen unmöglich, denn diese Geraden schneiden sich in O oder P , während die 4 Geraden x_1, x_2, x_3, x_4 im allgemeinen windschief sind. Zu einem Ausnahmefalle werden wir gleich gelangen. Daher ist durch die 4 Geraden x_1, x_2, x_3, x_4 eindeutig eine lineare Kongruenz festgelegt, welche in sich selbst transformiert wird, und mithin aus ∞^2 Linienquadrupeln besteht. Derartiger Kongruenzen haben wir ∞^2 , da es im ganzen Raum ∞^4 Geradenquadrupel giebt. Durch jede Gerade x_1 des Raumes ist eine derselben bestimmt, nämlich diejenige, in welcher sich auch noch die Geraden x_2, x_3, x_4 befinden. Die beiden Leitlinien einer jeden solchen Kongruenz entsprechen sich entweder je selbst oder in beiderlei Sinn der Beziehung. Das erste trifft im allgemeinen nicht ein, da eine beliebige Gerade x_1 keiner der 6 Doppelgeraden der Kollineation begegnet. Die beiden Leitlinien sind demnach gepaarte Geraden, und schneiden daher die Linien u und v . Daraus sehen wir sofort, dass alle unsere Kongruenzen die beiden Geraden u und v gemeinsam haben.

Wir hätten zu diesen Kongruenzen auch geführt werden können, indem wir von den Leitgeraden ausgingen. Es ist nämlich klar, dass jede lineare Kongruenz, welche 2 u und v treffende, gepaarte Geraden w_1 und w_2 zu Leitlinien hat, in sich selbst übergeht. Die Leitgeraden er-

füllen also die sich selbst entsprechende lineare Kongruenz mit den Direktrizen u und v . Also:

Die ∞^2 linearen Kongruenzen, welche 2 gepaarte Geraden aus der linearen Kongruenz mit den Leitlinien u und v zu Direktrizen haben, werden in sich selbst übergeführt. Jede derselben besteht aus ∞^2 Geradenquadrupeln. Durch jede Gerade des Raumes ist eine derselben bestimmt; alle haben die beiden Linien u und v gemein.

Zu dem oben erwähnten Ausnahmefalle gelangen wir folgendermassen. Schneidet die Gerade x_1 des Quadrupels (x) , von dem wir ausgingen, eine der Linien u und v , etwa u in U_1 , so geht durch denselben Punkt auch die Gerade x_3 , während x_2 und x_4 sich in dem zu U_1 gepaarten Punkte U_2 begegnen, der ebenfalls auf u liegt. Ist X_1 irgend ein von U_1 verschiedener Punkt auf x_1 , so dass also die Punkte X_2, X_3, X_4 bezüglich auf x_2, x_3, x_4 liegen, so trifft die Verbindungslinie X_1X_3 sowie die Linie X_2X_4 die Gerade u , und mithin gehen die Ebenen $\xi_1 = U_1X_1X_3 \equiv x_1x_3$ und $\xi_2 = U_2X_2X_4 \equiv x_2x_4$ durch u . Nun ist klar, dass alle Geraden der beiden Büschel $U_1\xi_2$ und $U_2\xi_1$ die Geraden x_1, x_2, x_3, x_4 schneiden. Daher wird durch 4 solche Geraden keine lineare Kongruenz festgelegt. Die Regelschar, welcher die Geraden x_1, x_2, x_3, x_4 angehören, zerfällt in die beiden Büschel $U_1\xi_1$ und $U_2\xi_2$, und die sich selbst entsprechende Fläche 2. Grades, auf welcher die beiden Regelscharen $(U_1\xi_1, U_2\xi_2)$ und $(U_1\xi_2, U_2\xi_1)$ liegen, artet in das Ebenenpaar (ξ_1, ξ_2) oder, bei dualer Auffassung, in das Punktepaar (U_1, U_2) aus.

Ist die Gerade x_1 die Verbindungslinie zweier aufeinanderfolgender Punkte X_1 und X_2 eines beliebigen Punktquadrupels (X) , so schneiden sich je 2 benachbarte Geraden des Geradenquadrupels (x) in den Punkten des Punktquadrupels (X) . Die Geraden, welche sich in dieser Weise auszeichnen, erfüllen den Reyeschen Komplex der Kollineation T_6 , der also in sich selbst übergeht. Derselbe

hat, da er quadratisch ist, mit jeder der ∞^2 betrachteten Kongruenzen eine sich selbst entsprechende Regelfläche 4. Grades gemein. Seien w_1 und w_2 die Leitlinien einer unserer Kongruenzen, so besteht diese Regelfläche aus den Seiten der Punktquadrupel, für welche w_1 und w_2 die Diagonalen sind. Wir erkennen leicht, dass die Regelfläche 4. Grades sich in 2 Regelflächen 2. Grades zerspaltet. Lassen wir nämlich einen Punkt X_1 die Gerade w_1 durchwandern, so bewegen sich die 3 andern Punkte des Quadrupels (X) projektiv zu demselben, und zwar X_3 ebenfalls auf w_1 , X_2 und X_4 auf w_2 . Demnach entstehen durch die Verbindungslinien X_1X_2 und X_1X_4 2 im allgemeinen nicht auf demselben Hyperboloid liegende Regelscharen, denen auch bezüglich die Geraden X_3X_4 und X_3X_2 angehören, wie man sieht, wenn man den Punkt X_1 in die Lage X_3 fallen lässt. In jeder der Regelscharen befinden sich auch die beiden Geraden u und v , in deren jeder sich 2 Geraden wie X_1X_2 und X_1X_4 vereinigen. Die beiden Hyperboloide, welche diese Regelscharen tragen, entsprechen sich in beiderlei Sinn der kollinearen Beziehung; die zweiten Regelscharen derselben haben die Geraden w_1 und w_2 gemeinschaftlich. Wir kommen also schon zu ∞^2 Flächen 2. Grades, die sich zu je zweien involutorisch entsprechen. Jedes Paar konstituiert eine Flächeninvolution, deren Basis-kurve in die Geraden u , v und 2 gepaarte Geraden w_1 und w_2 zerfällt.

Zu diesen Flächeninvolutionen werden wir sogleich von einer andern Seite her gelangen. Vorläufig haben wir gewonnen:

Der Reyesche Komplex unserer Kollineation hat mit jeder der oben besprochenen ∞^2 linearen Kongruenzen 2 Regelscharen gemein, welche auf getrennten Hyperboloiden liegen und sich involutorisch entsprechen. Die beiden Hyperboloide werden also auf die erste Art in einander übergeführt und konstituieren eine Flächeninvolution, deren Grund-

kurve aus den beiden Geraden u und v und den beiden Leitlinien w_1 und w_2 der betreffenden linearen Kongruenz besteht.

§ 23. Wir haben gesehen, dass die Transformation $T_3 = (A_1 A_3)(A_2 A_4)(A_5)$ alle die Flächen 2. Grades, welche durch die Axen u und v gelegt werden können, auf die erste Art in sich selbst überführt. Diese bilden ein in sich duales, lineares System 3. Stufe. Sie entsprechen sich im jetzigen Falle auf die erste Art paarweise involutorisch. Zwei solche entsprechende Flächen F_1^2 und F_2^2 schneiden sich ausser in den Geraden u und v noch in zwei Geraden w und w' , welche u und v treffen; denn eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, von welcher sich 2 zu einander windschiefe Geraden abtrennen, zerfällt in 2 Geradenpaare. Da die Flächen sich gegenseitig korrespondieren, so muss das Vierseit der Geraden u, v, w, w' in sich selbst verwandelt werden, und weil u und v Doppelgeraden sind, so entsprechen w und w' sich entweder auch selbst oder involutorisch.

Im ersteren Falle sind es also entweder die Geraden OR und PS oder OS und PR . Auf diese Weise gelangen wir zu 2 Büscheln $|OPSR|$ und $|OPRS|$ von Flächen 2. Grades, welche freilich alle imaginär sind; denn bei sämtlichen geht durch die reellen Punkte O und P je eine reelle und eine imaginäre Erzeugende. Sie entsprechen sich alle selbst, da die Gleichungen

$$\lambda_{\omega\pi} = \lambda_{\rho\sigma}, \quad \lambda_{\omega\pi} = \lambda_{\sigma\rho}$$

bestehen. Daher erkennen wir auch nachträglich, dass die Annahme, w und w' seien imaginäre Doppelgeraden, zulässig war. Denken wir uns in einem der beiden Büschel die Fläche durch eine u und v schneidende Gerade w_1 gelegt, so muss diese auch die gepaarte Gerade w_2 enthalten.

Bis jetzt haben wir jedoch nur ∞^1 Flächen bekommen; da wir im ganzen aber ∞^3 sich involutorisch entsprechender Flächen haben, so ist die andere Möglichkeit,

dass nämlich w und w' 2 gepaarte Geraden seien, die wir dann w_1 und w_2 nennen wollen, ebenfalls denkbar. Sind w_1 und w_2 2 beliebige solche Geraden, so können durch das Vierseit der Geraden u, v, w_1, w_2 involutorische Büschel von Flächen 2. Grades gelegt werden; denn einerseits wird ein derartiger Büschel in sich selbst transformiert, da die Grundkurve sich selbst entspricht, und andererseits findet involutorische Paarung statt, weil die im Büschel enthaltenen Ebenenpaare (uw_1, vw_2) und (uw_2, vw_1) sich involutorisch entsprechen. So bekommen wir ∞^2 Büschel von Flächen 2. Grades, deren Elemente involutorisch gepaart sind.

Es ist klar, dass diese Flächeninvolutionen dieselben sind, die wir schon oben gefunden haben (§ 22). Jedoch nicht alle Paare entsprechender Regelscharen, die wir hier erhalten, sind vollständige Durchschnitte des Re y eschen Komplexes und einer sich selbst korrespondierenden linearen Kongruenz. Jede Fläche eines Büschels mit der Grundkurve (u, v, w_1, w_2) ordnet die Punkte auf w_1 denen auf w_2 projektiv zu, so dass den Punkten uw_1 und vw_1 die Punkte uw_2 und vw_2 bezüglich entsprechen. Es bleibt also zur Festlegung der Projektivität noch ein Paar von Punkten willkürlich zu wählen. Den ∞^1 Projektivitäten, die sich auf diese Weise ergeben, entsprechen die ∞^1 Flächen des Büschels. Nur 2 von diesen Zuordnungen sind derartig, dass jedem Punkte X_1 von w_1 der ihm im einen oder andern Sinne der kollinearen Beziehung entsprechende Punkt auf w_2 , nämlich X_2 oder X_4 , korrespondiert. Diese Projektivitäten erzeugen 2 Flächen des Büschels, deren u und v enthaltende Regelscharen wir als vollständigen Durchschnitt des Re y eschen Komplexes und der linearen Kongruenz mit den Leitgeraden w_1 und w_2 erkennen.

Wir können leicht einsehen, dass die Doppelemente unserer Flächeninvolutionen die beiden Büschel $|OPRS|$ und $|OPSR|$ erfüllen. Wir haben ja gefunden, dass eine

Fläche aus einem dieser Büschel, welche eine u und v treffende Gerade w_1 enthält, auch die entsprechende Gerade w_2 enthält, und daher dem Büschel durch die Geraden u, v, w_1, w_2 , angehört. Daraus ergibt sich, dass in jedem von den Büscheln involutorisch gepaarter Flächen eine Fläche aus dem Büschel $|OPRS|$ und eine aus dem Büschel $|OPSR|$ vorhanden ist. Diese sind die Doppelemente der Flächeninvolution, da sie sich selbst entsprechen. Wir haben mithin die Sätze:

Die Flächen des linearen Systems 3. Stufe, welche alle durch die Geraden u und v hindurch gehen, entsprechen sich paarweise auf die erste Art involutorisch. In dem System sind ∞^2 involutorische Büschel enthalten, deren Grundkurven in Geraden zerfallen: 2 derselben sind die Doppellinien u und v , die andern sind 2 gepaarte Geraden, welche u und v treffen. Die Doppelemente dieser Flächeninvolutionen sind alle imaginär und bilden die 2 Büschel $|OPRS|$ und $|OPSR|$ von Flächen 2. Grades, welche auf die erste Art in sich selbst transformiert werden. Jede der Involutionen hat eine Fläche aus dem Büschel $|OPRS|$ und eine aus dem Büschel $|OPSR|$ als Doppelfläche.

§ 24. Durch die Transformation $T_3 = (A_1 A_3)(A_2 A_4)(A_5)$ wurden weiterhin alle die Flächen nicht verändert, welche u und v zu Polargeraden haben. Jeder Fläche dieses in sich dualen, linearen Systems 5. Stufe entspricht daher in der jetzigen Transformation eine andere in beiderlei Sinn der Beziehung, und zwar wieder auf die erste Art.

Fassen wir eine beliebige derartige Fläche F_1^2 ins Auge. Ihre reellen oder imaginären Schnitte mit den Geraden u und v seien U_1 und U_1' bezüglich V_1 und V_1' ; diese werden im allgemeinen weder Doppelpunkte noch gepaarte Punkte sein. Weil u und v Polargeraden für die Fläche F_1^2 sind, so gehören die Geraden $U_1 V_1, U_1 V_1', U_1' V_1, U_1' V_1'$ derselben an. Dieser Fläche korrespondiert eine andere, F_2^2 , welche die Geraden $U_2 V_2, U_2 V_2', U_2' V_2, U_2' V_2'$ enthält,

wenn U_2, U_2', V_2, V_2' die den U_1, U_1', V_1, V_1' bezüglich gepaarten Punkte sind. Die Raumkurve 4. Ordnung 1. Art K^4 , in der sich die beiden Flächen F_1^2 und F_2^2 durchdringen, entspricht sich selbst. Der Büschel B von Flächen 2. Grades, welcher diese Kurve zur Basis hat, wird daher auch in sich selbst transformiert, und seine Flächen sind involutorisch gepaart, da dies von den Flächen F_1^2 und F_2^2 gilt, von denen wir ausgingen. Auf jeder Fläche unseres Systems 5. Stufe kann nur eine sich selbst entsprechende Raumkurve 4. Ordnung liegen. Demnach erhalten wir deren ∞^4 , welche sämtlich Flächeninvolutionen tragen.

Um zu den Doppelementen dieser Flächeninvolutionen zu gelangen, untersuchen wir die Punktinvolution, welche der Büschel B mit der Grundkurve K^4 auf der Geraden u erzeugt. Diese ist konstituiert durch die Paare (U_1, U_1') und (U_2, U_2') . Da (U_1, U_2) und (U_1', U_2') 2 Paare sich vermöge der Kollineation entsprechender Punkte sind, so gehören sie der Involution auf u mit den Doppelpunkten O und P an. Dies gilt von je zwei Paaren der durch den Büschel B auf der Geraden u hervorgerufenen Punktinvolution, welche durch 2 sich entsprechende Flächen eingeschnitten werden. Wir haben einen einfachen Fall einer Transformation einer cyklischen Involution in sich selbst: die Involution, welche der Büschel B auf der Geraden u erzeugt, wird nämlich durch die Kollineation involutorisch in sich selbst transformiert¹⁾. Daraus folgt, dass die Doppelpunkte M_1 und M_2 der Büschelinvolution auf u harmonisch zu O und P sind. Die beiden Involutionen auf u sind 2 sogenannte harmonische Involutionen. (O, P) ist also umgekehrt ein Paar der Büschelinvolution, durch welches mithin eine Fläche des Büschels B hindurchgeht. Diese Fläche

1) Über Transformation von cyklischen Involutionen in sich selbst vergl. A. Ameseder, Sitz.-Ber. d. kais. Akad. d. Wissenschaften in Wien, Math.-naturw. Klasse, Bd. 98, Abt. 2a, S. 304.

wird aber durch die Transformation T_6 in sich selbst verwandelt, da die Punkte O und P sich selbst entsprechen. Die zweite Doppelfläche des Büschels B geht durch das Punktepaar (D_1, D_2) , welches sowohl zu O und P als auch zu M_1 und M_2 harmonisch ist, und dessen Punkte also in der Kollineation gepaart sind. Die beiden Doppelflächen der Involution, deren Träger die Kurve K^4 ist, schneiden die Gerade v ebenfalls in 2 Punktepaaren, welche die Transformation T_6 nicht ändert. Es sind (R, S) und das Paar (E_1, E_2) , welches zu R und S harmonisch ist und zugleich der durch den Büschel B in v eingeschnittenen Involution angehört. Die eine Doppelfläche geht durch das Vierseit OE_1PE_2 , die andere durch das Vierseit RD_1SD_2 . Nehmen wir nämlich an, eine der beiden Flächen enthielte das Vierseit $D_1E_1D_2E_2$, so läge auf derselben kein Doppelpunkt der Kollineation, während doch (nach Satz 15) eine sich selbst entsprechende Fläche 2. Grades mindestens 2 Doppelpunkte tragen muss. Beide Flächen werden auf die zweite Art in sich selbst transformiert, da jede nur 2 Doppelpunkte enthält. Die Bedingungen, welchen eine Kollineation zu genügen hat, wenn sie 2 derartige Flächen in sich transformieren soll, sind in unserem Falle erfüllt. Es ist nämlich

$$\lambda_{q\sigma} = -1, \lambda_{\omega q} = -\lambda_{\sigma\pi}$$

und

$$\lambda_{\omega\pi} = -1, \lambda_{q\omega} = -\lambda_{\pi\sigma}.$$

Daher gehen alle Flächen zweier Bündel auf diese Art in sich selbst über. Die Flächen des ersten Bündels enthalten ein Vierseit OV_1PV_2 , die des zweiten ein Vierseit RU_1SU_2 , wenn (V_1, V_2) und (U_1, U_2) Paare der Punktinvolutionen mit den Doppelpunkten R und S bezüglich O und P sind.

§ 25. Die Flächen des ersten Bündels sind alle hyperbolisch; denn die beiden Polargeraden u und v schneiden beide alle Flächen desselben reell, da O und P reell sind,

und die elliptische Involution auf v nur aus reellen Paaren besteht. Dagegen sind die Flächen des zweiten Bündels hyperbolisch, wenn das Paar (U_1, U_2) imaginär ist, dagegen elliptisch, wenn es reell ist. Den Übergang bilden 2 Kegelbüschel, die wir bekommen, wenn U_1 und U_2 in O oder P zusammenfallen. Die Kegel mit dem Scheitel O berühren die Ebenen ϱ und σ in den Kanten OS und OR ; es sind also die sich selbst entsprechenden Kegel, die sich in jedem Bündel vorfinden, der cyklisch kollinear auf sich bezogen ist (nach Satz 7). Die Kegel des Büschels mit dem Scheitel P berühren die Ebenen ϱ und σ in den Kanten PS und PR .

Selbstverständlich haben wir auch 2 Büschel sich selbst entsprechender Kegel mit den Scheiteln R und S welche jedoch, da sie imaginär sind, weniger Interesse bieten. Die Kegel mit dem Scheitel R berühren die Ebenen ω und π in den Kanten RP und RO , die mit dem Scheitel S in den Kanten SP und SO .

Durch ähnliche Betrachtungen, wie bei der vorigen Kollineation (§ 17), zeigt sich nun wieder, dass die sich auf die zweite Art entsprechenden Flächen 2. Grades sich zu je zweien aus demselben Bündel in einem Paar von den durch die Hauptpunkte O und P oder R und S gehenden, sich involutorisch entsprechenden Kegelschnitten in gepaarten Ebenen der Involution um u bezüglich v durchdringen und einen dem Bündel angehörigen Büschel mit lauter sich selbst entsprechenden Flächen konstituieren. Dagegen schneiden sich je 2 Flächen $F_2 F_2'$ aus verschiedenen Bündeln in einer allgemeinen Raumkurve 4. Ordnung 1. Art und bestimmen einen Flächenbüschel, welcher involutorisch in sich selbst transformiert wird; denn dass sämtliche Flächen des Büschels in sich selbst übergehen, ist unmöglich, da ausser den Flächen F^2 und $F^{2'}$ keine Flächen desselben Doppelpunkte der Kollineation enthalten können; ebenso wenig ist (nach Satz 4) Quadrupellage im

Büschel möglich, weil 2 reelle sich selbst entsprechende Flächen F^2 und $F^{2'}$ vorhanden sind.

Wir können die Resultate der ganzen Untersuchung kurz in folgenden Sätzen zusammenfassen:

*Die Flächen 2. Grades, welche u und v zu Polarge-
raden haben, und also insgesamt ein in sich duales, lineares
System 5. Stufe bilden, gehen durch die vorliegende Trans-
formation zu je zweien auf die erste Art in einander über.
Zwei entsprechende dieser Flächen konstituieren einen Büschel,
dessen Elemente involutorisch gepaart sind, und dessen Basis-
kurve eine sich selbst entsprechende Raumkurve 4. Ordnung
1. Art ist. Die Doppelflächen dieser ∞^4 Flächeninvolutionen
erfüllen 2 in sich duale, lineare Systeme 2. Stufe von Flächen
2. Grades, welche alle auf die zweite Art in sich selbst trans-
formiert werden. Die Flächen des ersten dieser Systeme
gehen durch ein Vierseit OV_1PV_2 , die des zweiten durch
ein Vierseit RU_1SU_2 ; dabei sind (U_1, U_2) und (V_1, V_2) Paare
der Involution auf u bezüglich auf v . Alle in dem ersten
Systeme enthaltenen Büschel haben 2 gepaarte Kegelschnitte
durch O und P , welche in entsprechenden Ebenen der Invo-
lution um u liegen, als Grundkurve; analoges gilt für das
zweite System. Jede der Flächeninvolutionen hat eine Fläche
aus dem einen und eine aus dem andern der beiden Systeme
als Doppellelemente, und je 2 beliebige von diesen sich selbst
entsprechenden Flächen aus verschiedenen Bündeln konsti-
tuieren eine Flächeninvolution, deren Doppellelemente sie sind.*

Ausser den bisher besprochenen Systemen sich invo-
lutorisch entsprechender Flächen 2. Grades giebt es keine
weiteren, da ausser diesen Flächen durch die Transforma-
tion $T_3 = (A_1A_3)(A_2A_4)(A_5)$, wie wir gesehen haben, keine
Flächen 2. Grades mehr in sich selbst übergeführt werden.

§ 26. Betrachten wir die Raumkurve 4. Ordnung
1. Art, welche durch die 4 Punkte eines Quadrupels (X)
und durch die 4 Ecken O, P, R, S , des Haupttetraeders
hindurchgeht. Diese Kurve zerfällt offenbar in die 4 Ge-

raden X_1X_3 , X_2X_4 , u , v . Wir haben schon erkannt, dass jeder der ∞^2 Büschel von Flächen 2. Grades, für welche 4 solche Geraden die Grundkurve abgeben, involutorisch auf sich selbst bezogen ist.

Auch durch die 8 Punkte zweier Quadrupel (X) und (Y) ist eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Art festgelegt, welche in sich selbst transformiert wird, und also ∞^1 Punktquadrupel enthält. Da man aus den ∞^3 Quadrupeln des Raumes ∞^6 -mal, aus den ∞^1 auf einer sich selbst entsprechenden Kurve dagegen ∞^2 -mal 2 herausgreifen kann, so giebt es im ganzen ∞^4 auf diese Weise festgelegte Raumkurven 4. Ordnung 1. Art. Dieselben tragen sämtlich involutorische Büschel von Flächen 2. Grades. Schneidet nämlich eine Fläche F_1^2 des Büschels B , welcher eine derartige Kurve K^4 zur Grundkurve hat, die Geraden u und v in den Punkten U_1 und U_1' bezüglich V_1 und V_1' , so geht die Fläche F_2^2 , welche aus derselben durch die Transformation T_6 entsteht, durch die Punkte U_2 , U_2' , V_2 , V_2' , welche jenen Punkten bezüglich gepaart sind. Die Fläche F_3^2 enthält wieder die Punkte U_1 , U_1' , V_1 , V_1' , ist also mit F_1^2 identisch. Daraus folgt, dass die Flächen F_1^2 und F_2^2 , also alle Flächen des Büschels B zu je zweien sich involutorisch entsprechen. Damit haben wir alle sich selbst entsprechenden Raumkurven 4. Ordnung 1. Art gewonnen. Also:

Es giebt ∞^4 sich selbst entsprechende Raumkurven 4. Ordnung 1. Art, und diese tragen sämtlich involutorische Büschel von Flächen 2. Grades.

§ 27. Herr Schröter¹⁾ leitet unter anderen folgende Sätze über sich involutorisch entsprechende Hyperboloide bei kollinearen Räumen in Quadrupellage her:

„Irgend 2 Quadrupel zweier in Quadrupellage befindlicher kollinearere Räume bilden allemal 2 Tetraeder, die

1) a. z. a. O., S. 240 ff.

gleichzeitig auf 4 verschiedene Arten hyperboloidisch liegen, und zwar gehören, wenn X_1, X_2, X_3, X_4 und Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 die beiden Quadrupel sind, je 4 Verbindungslinien der Ecken:

$$\begin{aligned} &X_1Y_1, X_2Y_4, X_3Y_3, X_4Y_2; \\ &X_1Y_2, X_2Y_1, X_3Y_4, X_4Y_3; \\ &X_1Y_3, X_2Y_2, X_3Y_1, X_4Y_4; \\ &X_1Y_4, X_2Y_3, X_3Y_2, X_4Y_1 \end{aligned}$$

immer einer Regelschar an, wobei diese 4 Fälle in einander übergehen durch cyklische Fortsetzung der Punkte des einen oder andern Quadrupels.“

„Nennen wir die 4 Hyperboloide, welche diese 4 Regelscharen enthalten, bezüglich $H_1^2, H_1^{2'}, H_2^2, H_2^{2'}$, so sind H_1^2 und H_2^2 , sowie $H_1^{2'}$ und $H_2^{2'}$ entsprechende Figuren der kollinearen Räume in beiderlei Sinn der Beziehung.“

„Die 4 Hyperboloide $H_1^2, H_1^{2'}, H_2^2, H_2^{2'}$ gehören einem Büschel an, d. h. sie schneiden sich in einer und derselben Raumkurve 4. Ordnung und 1. Species K^4 , welche durch die 8 Punkte der beiden Quadrupel bestimmt ist. Diese Raumkurve K^4 entspricht sich selbst in beiderlei Sinn der kollinearen Beziehung. Wir können also auf derselben unendlich viele neue Quadrupel herstellen, indem wir von irgend einem Punkt derselben ausgehen.“

Da ausser den von uns betrachteten involutorischen Flächen 2. Grades keine andern mehr vorhanden sind, so müssen die Flächen des Herrn Schröter in einem unserer beiden Systeme enthalten sein; es fragt sich, in welchem. Befinden sie sich im ersten System, so müssen die 4 Hyperboloide $H_1^2, H_1^{2'}, H_2^2, H_2^{2'}$ sich in den Geraden u und v und 2 gepaarten Geraden w_1 und w_2 , welche u und v treffen, durchdringen. Ferner müssen dann die 8 Punkte $X_1 \dots Y_4$ sich auf die beiden Geraden w_1 und w_2 verteilen. Da das bei beliebiger Wahl der Quadrupel (X) und (Y) nicht eintritt, so gehören diese Hyperboloide im allgemeinen dem letzten der oben besprochenen Systeme an.

Aber selbst wenn die Punkte $X_1 \dots Y_4$ auf 2 ge-

paarte Geraden w_1 und w_2 fallen, etwa X_1, X_3, Y_1, Y_3 auf w_1 und X_2, X_4, Y_2, Y_4 auf w_2 , so kommen wir dennoch zu Flächen, welche u und v zu Polargeraden haben. Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden w_1 und w_2 mit u und v durch U_1 und U_2 bezüglich V_1 und V_2 ; diese sind reell. Die beiden Hyperboloide H_1^2 und H_2^2 sind unbestimmt, weil sich von den 4, jedes derselben bestimmenden Geraden je 2 in w_1 und 2 in w_2 vereinigen. Die beiden Hyperboloide $H_1^{2'}$ und $H_2^{2'}$ enthalten die Geraden w_1 und w_2 ganz, da von jeder derselben 4 Punkte auf ihnen liegen, und durchdringen sich deshalb ausserdem noch in 2 weiteren, zu einander windschiefen Geraden, welche jene zu einem windschiefen Vierseit ergänzen und sich entweder selbst oder gegenseitig entsprechen. Diese Geraden sind daher entweder $U_1U_2 \equiv u$ und $V_1V_2 \equiv v$ oder U_1V_2 und U_2V_1 . Es mag genügen, zu zeigen, dass die Gerade u nicht auf dem Hyperboloid $H_1^{2'}$ liegt. Weil die 4 Geraden $X_1Y_2, X_2Y_1, X_3Y_4, X_4Y_3$ auf $H_1^{2'}$ sich befinden, so ist

$$(X_1X_3Y_1Y_3) \wedge (Y_2Y_4X_2X_4).$$

Die Paare (X_1, X_3) und (Y_1, Y_3) sind zu dem reellen Paar (U_1, V_1) harmonisch, und haben daher die hyperbolische Lage; ebenso die Paare (X_2, X_4) und (Y_2, Y_4) . Nennen wir nun (X_1X_3) diejenige endliche oder unendliche Strecke zwischen den Punkten X_1 und X_3 , welche die Punkte Y_1 und Y_3 nicht enthält, (Y_1Y_3) diejenige zwischen Y_1 und Y_3 , welche X_1 und X_3 nicht enthält, und analog in den beiden anderen Fällen, so liegt einer der Punkte U_1 und V_1 , etwa U_1 , auf der Strecke (X_1X_3) ; dann liegt, da diese Strecke durch die Kollineation T_6 in (X_2X_4) übergeht, U_2 auf der Strecke (X_2X_4) und kann sich nicht auf (Y_2Y_4) befinden. In der Projektivität, welche durch das Hyperboloid $H_1^{2'}$ zwischen den Punktreihen auf w_1 und w_2 entsteht, entspricht der Strecke (X_1X_3) die Strecke (Y_2Y_4) , wie man aus

$$(X_1X_3Y_1Y_3) \wedge (Y_2Y_4X_2X_4)$$

ersieht. Daher kann nicht dem auf der Strecke (X_1X_3) liegenden Punkte U_1 der auf der Strecke (X_2X_4) befindliche Punkt U_2 vermöge dieser Projektivität zugeordnet sein, und also die Gerade $U_1U_2 \equiv u$ nicht auf dem Hyperboloid H_1^2 liegen.

§ 28. Bei der Transformation $T_3 = (A_1A_3)(A_2A_4)(A_5)$ erwähnten wir, dass alle kubischen Raumkurven, welche die Achsen u und v zu associierten Geraden haben, in sich selbst übergeführt werden, oder, was dasselbe ist, alle, welche einem der Bündel $|UVV'U'|$ angehören, wenn U und U' 2 beliebige Punkte auf u und V und V' irgend 2 Punkte auf v sind. Diese Kurven entsprechen sich daher bei der vorliegenden Kollineation zu je zweien involutorisch. Einer Kurve, welche ein Tetraeder $U_1V_1V_1'U_1'$ zum Schmiegungstetraeder hat, ist eine andere gepaart, für welche das entsprechende Tetraeder $U_2V_2V_2'U_2'$ ein Schmiegungstetraeder ist. Lassen wir diese beiden Tetraeder auf irgend eine der 4 möglichen Weisen im Haupttetraeder zusammenfallen, $U_1V_1V_1'U_1' \equiv ORSP, OSRP, PRSO, PSRO$, so gelangen wir zu einem in sich selbst übergehenden Bündel kubischer Raumkurven. Wir können aber leicht einsehen, dass die Kurven der 4 Bündel, welche sich so ergeben, einzeln in sich selbst verwandelt werden. Betrachten wir z. B. eine Kurve K^3 des Bündels $|OSRP|$. Da dieselbe durch die Punkte O und R hindurchgeht und in diesen Punkten die Ebenen ϱ und ω zu Schmiegungebenen, die Geraden OS und RP zu Tangenten hat, so wird sie aus O durch einen Kegel 2. Grades projiciert, welcher die Ebenen ϱ und σ in den Kanten OS und OR berührt, und aus R durch einen solchen, welcher die Ebenen ω und π in den Kanten RP und RO tangiert. Diese Kegel entsprechen sich, wie wir erkannten, beide selbst; mithin wird auch die Kurve K^3 , in der sie sich durchdringen, in sich selbst verwandelt. Ebenso ergibt sich, dass jede Kurve der Bündel $|ORSP|, |PRSO|, |PSRO|$ in sich selbst übergeht.

Wir können dies auch daraus entnehmen, dass die Bedingungen

$$\begin{aligned} \lambda_{\omega\sigma} &= \lambda_{\pi\rho} = \lambda_{\sigma\pi}, \quad \lambda_{\omega\rho} = \lambda_{\pi\sigma} = \lambda_{\rho\pi}, \\ \lambda_{\pi\rho} &= \lambda_{\omega\sigma} = \lambda_{\rho\omega}, \quad \lambda_{\pi\sigma} = \lambda_{\omega\rho} = \lambda_{\sigma\omega} \end{aligned}$$

erfüllt sind. Diese kubischen Raumkurven sind jedoch alle imaginär, da alle in einem reellen Punkt O oder P eine imaginäre Schmiegungeebene und Tangente haben. Also:

Die ∞^4 Raumkurven 3. Ordnung, welche die Geraden u und v zu associierten Geraden haben, entsprechen sich paarweise involutorisch; den Kurven eines Bündels $|U_1V_1V_1'U_1|$ sind die des Bündels $|U_2V_2V_2'U_2|$ zugeordnet, wenn (U_1, U_2) und (U_1', U_2') irgend 2 Paare der Involution auf u , (V_1, V_2) und (V_1', V_2') irgend 2 Paare derjenigen auf v sind. Die kubischen Raumkurven der 4 Bündel $|OSRP|$, $|ORSP|$, $|PSRO|$, $|PRSO|$, welche allerdings imaginär sind, entsprechen sich alle selbst.

$$T_7 = (A_1A_2A_3A_4A_5).$$

§ 29. Wir erkennen sofort, dass die kollinearen Räume sich in Quintupellage befinden, da die fünfmalige Anwendung der Transformation jeden der bestimmenden Punkte in sich selbst überführt. Weil 5 eine Primzahl ist, so kann sich in keinem Falle (nach Satz 13) der Cyklus eher schliessen, ausser bei den Elementen und Gebilden, die überhaupt nicht verändert werden. Herr J. Lüroth beweist¹⁾, dass in 2 kollinearen Räumen stets wenigstens 2 reelle, zu einander windschiefe Doppelgeraden vorhanden sind. Nennen wir dieselben im jetzigen Falle wieder u und v , so müssen die Punktreihen auf denselben entweder bezüglich identisch sein oder cyklische Involutionen 5. Ordnung bilden. Ersteres ist unmöglich, da sonst die 5 Ebenen $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$, $A_4A_5A_1$, $A_5A_1A_2$ die Geraden u und v je in demselben Punkte schneiden müssten. Die

1) Math. Ann., Bd. 13, S. 310.

4 Doppelpunkte und die 4 Doppelebenen sind wegen der cyklischen Involutionen 5. Ordnung paarweise bezüglich konjugiert imaginär. Also:

Wir haben 2 reelle zu einander windschiefe Doppelgeraden u und v , welche cyklische Punkt- und Ebeneninvolutionen 5. Ordnung tragen.

Die konjugiert imaginären Doppelpunkte auf u nennen wir wieder O und P , die auf v R und S .

Da die Kollineation $T_7 \infty^3$ Punktquintupel im Raume besitzt, so ist (nach Satz 21) *die Mannigfaltigkeit der Kollineationen in Quintupellage ∞^{12} .*

Die Quintupellage kollinearier Räume ist von Herrn A. Ameseder¹⁾ von einem allgemeineren Standpunkte aus behandelt. Derselbe findet 3 verschiedene Fälle kollinearier Räume in Fünfeckslage: 1) eine Kollineation, bei welcher, ähnlich wie bei der von uns betrachteten Transformation $T_4 = (A_1 A_2 A_3) (A_4) (A_5)$, eine Gerade u mit lauter sich selbst entsprechenden Punkten und eine Gerade v mit lauter sich selbst entsprechenden Ebenen existiert, und bei welcher die Punkte eines jeden Quintupels in einer Ebene durch v liegen, und die Ebenen eines jeden Quintupels durch einen und denselben Punkt von u gehen; 2) eine gescharte Kollineation, bei der die Punkte eines jeden Quintupels auf einer Geraden liegen, und alle diese Geraden eine lineare Kongruenz mit imaginären Leitlinien bilden; 3) die Kollineation mit räumlichen Quintupeln, welche wir allein zu betrachten haben, da nur bei ihr die Punkte eines Quintupels beliebige Lage besitzen.

§ 30. Die 5 Geraden $x_1, x_2, \dots, x_5$ eines beliebigen Geradenquintupels bestimmen eindeutig einen linearen Komplex, welcher sich selbst entspricht. Durch jede Gerade x_1

1) Sitz.-Ber. d. kais. Akad. d. Wissenschaften in Wien, Math.-naturw. Klasse, Bd. 98, Abt. 2a, S. 588 ff. Diese Abhandlung ist mir erst bekannt geworden, als ich die vorliegende Arbeit bis auf einige Erweiterungen bereits vollendet hatte.

des Raumes ist ein solcher festgelegt, welcher nämlich auch die 4 Linien x_2, x_3, x_4, x_5 enthält. Wir vermuten daher schon, dass wir zu einem Büschel sich selbst entsprechender linearer Komplexe gelangen. Je 2 dieser ∞^1 Komplexe durchdringen sich in einer linearen Kongruenz, welche in sich selbst transformiert wird. Die beiden Leitgeraden derselben sind 2 Kanten des Haupttetraeders, da ein gegenseitiges Entsprechen derselben (nach Satz 13) wegen der Quintupellage undenkbar ist.

Betrachten wir andererseits die sich selbst entsprechende lineare Kongruenz mit den Leitlinien u und v und den Büschel von linearen Komplexen, welcher dieselbe zur Basis hat. Dieser Büschel wird in sich selbst transformiert, weil die Basiskongruenz durch die Kollineation nicht verändert wird. In dem Büschel befinden sich aber 2 reelle, in sich selbst übergehende Komplexe, nämlich die speziellen linearen Komplexe mit den Achsen u und v . Daher werden (nach Satz 4) alle Komplexe des Büschels in sich selbst verwandelt, da ein involutorisches Entsprechen bei der Quintupellage der Räume nicht denkbar ist. Von den Komplexbüscheln mit den Grundkongruenzen $[OR, PS]$ und $[OS, PR]$ lässt sich ein Gleiches nicht aussagen, da die speziellen linearen Komplexe mit den Achsen OR, OS, PR und PS imaginär sind. Durch jede Gerade x_1 des Raumes ist ein Komplex des ersten Büschels bestimmt und in diesem befinden sich auch die Geraden x_2, x_3, x_4, x_5 . Daher sehen wir, dass jeder lineare Komplex, welcher durch 5 Geraden eines beliebigen Geradenquintupels definiert ist, zu diesem Büschel gehört. Wir haben also:

Die linearen Komplexe des Komplexbüschels, welcher die lineare Kongruenz mit den Leitlinien u und v zur Basis hat, entsprechen sich alle selbst. Demnach finden wir die reellen Kanten u und v des Haupttetraeders als die Leitlinien der Durchschnittskongruenz zweier sich selbst entsprechender linearer Komplexe.

Wir gelangen zu einer einfachen Herstellungsweise der Geraden u und v . Bekanntlich ist jede lineare Kongruenz, welche durch 4 Geraden eines linearen Komplexes bestimmt ist, ganz in demselben enthalten. Denken wir uns nun 2 Quintupel von Geraden (x) und (y) , konstruiert und nennen die beiden durch dieselben charakterisierten linearen Komplexe $I^{(x)}$ und $I^{(y)}$. Seien ferner $g_1^{(x)}$ und $l_1^{(x)}$ die beiden Treffgeraden von x_1, x_2, x_3, x_4 , $g_2^{(x)}$ und $l_2^{(x)}$ diejenigen von x_2, x_3, x_4, x_5 , $g_1^{(y)}$ und $l_1^{(y)}$ die von y_1, y_2, y_3, y_4 , und endlich $g_2^{(y)}$ und $l_2^{(y)}$ die von y_2, y_3, y_4, y_5 . Dann gehören also z. B. alle Geraden, welche $g_1^{(x)}$ und $l_1^{(x)}$ treffen, dem Komplex $I^{(x)}$ an. Die Treffgeraden von $g_1^{(x)}$, $l_1^{(x)}$, $g_1^{(y)}$, $l_1^{(y)}$, sowie die von $g_2^{(x)}$, $l_2^{(x)}$, $g_2^{(y)}$, $l_2^{(y)}$ befinden sich daher in den beiden Komplexen $I^{(x)}$ und $I^{(y)}$. Damit haben wir 4 Geraden der Durchschnittskongruenz $(I^{(x)}, I^{(y)})$ gewonnen, deren Axen u und v sich nun leicht konstruieren lassen¹⁾.

§ 31. Die Invarianten λ sind der Gleichung

$$\lambda^5 = +1$$

unterworfen, und haben also die Form

$$\lambda = \cos \frac{2\kappa\pi}{5} + i \sin \frac{2\kappa\pi}{5};$$

dabei kann κ alle ganzen Zahlenwerte annehmen, die jedoch durch ihren Rest nach dem Modul 5 ersetzt werden dürfen. Der Wert 0 ist unzulässig; die zugehörige Invariante hätte nämlich den Wert $+1$, welcher ausgeschlossen ist, da eine Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte im allgemeinen keine Kante des Haupttetraeders trifft. Fügen wir den den Invarianten λ entsprechenden Grössen κ bezüglich dieselben Zeiger hinzu, so ergeben sich vermöge der Moivre'schen Formel aus den Beziehungen zwischen den Invarianten λ folgende Gleichungen (oder streng genommen Kongruenzen nach dem Modul 5):

1) Eine andere Konstruktion s. Ameseder, a. a. O., S. 606.

1) $\kappa_{\pi\rho} = \kappa_{\omega\rho} - \kappa_{\omega\pi}$, 2) $\kappa_{\rho\sigma} = \kappa_{\omega\sigma} - \kappa_{\omega\rho}$, 3) $\kappa_{\sigma\pi} = \kappa_{\omega\pi} - \kappa_{\omega\sigma}$.
 Ferner korrespondieren 2 konjugiert imaginären oder re-
 derten Invarianten λ 2 entgegengesetzt gleiche oder, wenn
 wir uns auf positive Werte beschränken wollen, 2 sich
 zu 5 ergänzende Grössen κ . Demnach ist

$$4) \kappa_{\omega\rho} = -\kappa_{\pi\sigma} = \kappa_{\sigma\pi}, \quad 5) \kappa_{\omega\sigma} = -\kappa_{\pi\rho} = \kappa_{\rho\pi},$$

$$6) \kappa_{\omega\pi} = -\kappa_{\pi\omega}, \quad 7) \kappa_{\rho\sigma} = -\kappa_{\sigma\rho}.$$

Durch Kombination der Gleichungen 1) und 5) oder 3)
 und 4) ergibt sich

$$8) \kappa_{\omega\pi} = \kappa_{\omega\rho} + \kappa_{\omega\sigma}.$$

Die Grössen $\kappa_{\omega\rho}$ und $\kappa_{\omega\sigma}$ müssen ungleich sein, denn
 sonst wäre nach Gleichung 2) $\kappa_{\rho\sigma} = 0$. Da ferner eine Ver-
 tauschung der beiden Grössen $\kappa_{\omega\rho}$ und $\kappa_{\omega\sigma}$ auf eine Ver-
 tauschung der beiden konjugiert imaginären Punkte R und
 S hinausläuft, welche unwesentlich ist, so können wir vor-
 aussetzen

$$9) \kappa_{\omega\sigma} > \kappa_{\omega\rho}.$$

Berücksichtigen wir dies alles, und nehmen wir an

- I. $\kappa_{\omega\rho} = 1, \kappa_{\omega\sigma} = 2$, so ist $\kappa_{\omega\pi} = 3, \kappa_{\pi\rho} = 3, \kappa_{\rho\sigma} = 1, \kappa_{\sigma\pi} = 1$;
- II. $\kappa_{\omega\rho} = 1, \kappa_{\omega\sigma} = 3$, „ „ $\kappa_{\omega\pi} = 4, \kappa_{\pi\rho} = 2, \kappa_{\rho\sigma} = 2, \kappa_{\sigma\pi} = 1$;
- III. $\kappa_{\omega\rho} = 1, \kappa_{\omega\sigma} = 4$, „ „ $\kappa_{\omega\pi} = 0, \kappa_{\pi\rho} = 1, \kappa_{\rho\sigma} = 3, \kappa_{\sigma\pi} = 1$;
- IV. $\kappa_{\omega\rho} = 2, \kappa_{\omega\sigma} = 3$, „ „ $\kappa_{\omega\pi} = 0, \kappa_{\pi\rho} = 2, \kappa_{\rho\sigma} = 1, \kappa_{\sigma\pi} = 2$;
- V. $\kappa_{\omega\rho} = 2, \kappa_{\omega\sigma} = 4$, „ „ $\kappa_{\omega\pi} = 1, \kappa_{\pi\rho} = 1, \kappa_{\rho\sigma} = 2, \kappa_{\sigma\pi} = 2$;
- VI. $\kappa_{\omega\rho} = 3, \kappa_{\omega\sigma} = 4$, „ „ $\kappa_{\omega\pi} = 2, \kappa_{\pi\rho} = 1, \kappa_{\rho\sigma} = 1, \kappa_{\sigma\pi} = 3$.

Die Fälle III und IV sind auszuschliessen, weil in ihnen
 der Wert 0 vorkommt. Die Fälle I und VI sowie II
 und V gehen in einander über, wenn wir die beiden
 konjugiert imaginären Punkte O und P vertauschen. Ebenso
 ergibt sich II aus I, wenn wir O und S , sowie P und R ,
 also die Geraden u und v mit einander vertauschen. Dem-
 nach können wir die Bezeichnung der Doppelemente so
 wählen, dass die Grössen κ die Werte I haben, also

$$\kappa_{\omega\rho} = \kappa_{\sigma\pi} = \kappa_{\rho\sigma} = +1, \quad \kappa_{\rho\pi} = \kappa_{\omega\sigma} = \kappa_{\pi\omega} = +2,$$

$$\kappa_{\sigma\omega} = \kappa_{\pi\rho} = \kappa_{\omega\pi} = +3, \quad \kappa_{\pi\sigma} = \kappa_{\rho\omega} = \kappa_{\sigma\rho} = +4.$$

Daraus finden wir:

$$\lambda_{\omega\rho} = \lambda_{\sigma\pi} = \lambda_{\rho\sigma} = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) + \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$\lambda_{\rho\pi} = \lambda_{\omega\sigma} = \lambda_{\pi\omega} = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) + \frac{i}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$\lambda_{\sigma\omega} = \lambda_{\pi\rho} = \lambda_{\omega\pi} = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) - \frac{i}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$\lambda_{\pi\sigma} = \lambda_{\rho\omega} = \lambda_{\sigma\rho} = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) - \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Um die Invariante $\mathcal{A}$ zu bekommen, berechnen wir:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_{\omega\rho})(1 - \lambda_{\pi\sigma}) &= \frac{1}{16}(5 - \sqrt{5} - i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})(5 - \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) \\ &= \frac{1}{16}(25 + 5 - 10\sqrt{5} + 10 + 2\sqrt{5}) = \frac{40 - 8\sqrt{5}}{16} = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_{\omega\sigma})(1 - \lambda_{\pi\rho}) &= \frac{1}{16}(5 + \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})(5 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}) \\ &= \frac{1}{16}(25 + 5 + 10\sqrt{5} + 10 - 2\sqrt{5}) = \frac{40 + 8\sqrt{5}}{16} = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}), \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{25 + 5 - 10\sqrt{5}}{25 - 5},$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

§ 32. Durch die 5 Punkte $X_1, X_2 \dots X_5$ eines Quintupels giebt es stets eine reelle Fläche 2. Grades F^2 , welche die Geraden u und v zu Polargeraden hat. Es ist sofort klar, dass dieselbe durch die Transformation T_7 in sich selbst übergeführt wird. Sie schneidet die Geraden u und v daher in den Punkten O und P , bezüglich R und S , da ein gegenseitiges Entsprechen der beiden Schnittpunkte mit u oder v undenkbar ist. Weil die Geraden u und v Polargeraden in bezug auf die Fläche F^2 sind und dieselbe in O und P resp. R und S treffen, so liegen die Geraden OR, RP, PS und SO auf der Fläche, und diese gehört also dem Büschel $|ORPS|$ an. Sie wird auf die

erste Art in sich selbst transformiert, da die 4 Ecken des Haupttetraeders auf ihr liegen. Durch jeden Punkt X_1 des Raumes ist eine solche Fläche bestimmt, nämlich diejenige, welche ausserdem durch die Punkte $X_2 \dots X_5$ hindurch geht und u und v zu Polargeraden hat. Da diese Flächen mithin einen Büschel bilden, anderseits aber in dem Büschel $|ORPS|$ enthalten sind, so gewinnen wir den Satz:

Die Flächen 2. Grades des Büschels $|ORPS|$ werden auf die erste Art in sich selbst transformiert¹⁾.

Dieses Resultat bestätigen uns die Werte der Invarianten:

$$\lambda_{\omega\varrho} = \lambda_{\sigma\pi}.$$

§. 33. Durch die Bedingungen, die Gerade u doppelt zu schneiden und durch 5 Punkte eines Quintupels, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 , zu gehen, ist eine kubische Raumkurve vollständig und eindeutig bestimmt. Dieselbe entspricht sich selbst und trägt eine cyklische Involution 5. Ordnung, deren konjugiert imaginäre Doppelpunkte O und P sind, da die Kurve wegen der Quintupellage keine anderen Punkte mit u gemein haben kann. Die Schmiegungebenen in diesen Punkten sind konjugiert imaginäre Doppelebenen; ϱ und σ können es nicht sein; denn dann schnitte jede derselben die Kurve ausser im Oskulationspunkt O oder P noch in einem zweiten Punkte P oder O ; also sind es π und ω . Analoges gilt von den Tangenten in O und P . Diese sind entweder OR und PS oder OS und PR . Nehmen wir an, es seien OR und PS , — und wir werden sehen, dass diese Annahme bei der gewählten Bezeichnung der Doppelpunkte richtig ist, — so hat die Kurve das Tetraeder $ORPS$ zum Schmiegungstetraeder, und infolge dessen werden alle Kurven des Bündels $|ORPS|$ in sich selbst transformiert. Wenn wir die Annahme festhalten,

1) Vergl. A. Ameseder, a. z. a. O., S. 603.

dass die Tangenten in den Punkten O und P an die Kurve K^3 , von der wir ausgingen, die Linien OR und PS sind, so wird keine Kurve des Bündels $|OSPR|$ in sich selbst verwandelt. Eine solche Kurve müsste nämlich, wenn sie einen Punkt Y_1 enthält, die Gruppe (Y) enthalten. Durch die 7 Punkte $O, P, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$ giebt es aber höchstens eine kubische Raumkurve, und diese gehört nach unserer Annahme dem Bündel $|ORPS|$ an, kann also nicht zugleich dem Bündel $|OSPR|$ angehören. Dass die gemachte Annahme richtig ist, ergibt sich aus den Werten der Invarianten λ ; es ist ja

$$\lambda_{\omega\varrho} = \lambda_{\sigma\pi} = \lambda_{\varrho\sigma}.$$

Auf ähnliche Weise gelangen wir, wenn wir einer kubischen Raumkurve die Bedingungen auferlegen, durch die 5 Punkte eines Quintupels zu gehen und die Gerade v zur Sehne zu haben, zu einem Bündel kubischer Raumkurven, welche durch die Punkte R und S gehen und in diesen Punkten σ und ϱ zu Schmiegungebenen und entweder RO und SP oder RP und SO zu Tangenten haben. Von diesen beiden Fällen ist wiederum nur einer möglich, und wir können uns leicht überlegen, dass dies der zweite ist. Es lässt sich durch die 5 Punkte eines Quintupels (X) eine und nur eine kubische Raumkurve konstruieren, welche OR berührt, und zwar in O . Diese hat $ORPS$ zum Schmiegungetetraeder, und kann daher nicht $ROSP$ zum Schmiegungetetraeder haben. Demnach entsprechen die Kurven des Bündels $|RPSO|$ sich selbst. Dies hätten wir auch aus den Invarianten λ erkennen können:

$$\lambda_{\varrho\pi} = \lambda_{\omega\sigma} = \lambda_{\pi\omega}.$$

Verlangen wir von einer kubischen Raumkurve, dass sie 5 Punkte eines Quintupels (X) trägt und eine der imaginären Doppelgeraden zur Sehne hat, so gelangen wir zu nichts Neuem. Wir haben ja gesehen, dass es durch die 5 Punkte $X_1 \dots X_5$ eine Raumkurve 3. Ordnung

giebt, welche OR in O berührt und dem Bündel $|ORPS|$ angehört.

Wir haben bewiesen:

Die kubischen Raumkurven der beiden Bündel $|ORPS|$ und $|RPSO|$ entsprechen sich selbst. Eine kubische Raumkurve, welche durch 5 Punkte eines Quintupels gelegt ist und u oder v zweimal schneidet, gehört dem Bündel $|ORPS|$ resp. $|RPSO|$ an¹⁾.

Die Kurven eines jeden der beiden Bündel werden aus jedem der auf ihnen liegenden sich selbst entsprechenden Punkte durch sich selbst entsprechende Kegel projiziert. Auf diese Weise erhalten wir 4 Büschel sich selbst entsprechender Kegel mit imaginären Scheiteln: 1) den Büschel von Kegeln mit dem Scheitel O , welche die Ebenen π und ϱ in den Kanten OR und OP berühren, 2) den Büschel von Kegeln mit dem Scheitel P , welche die Ebenen ω und σ in den Kanten PS und PO berühren, 3) den Büschel von Kegeln mit dem Scheitel R , welche die Ebenen π und σ in den Kanten RS und RP berühren, 4) den Büschel von Kegeln mit dem Scheitel S , welche die Ebenen ω und ϱ in den Kanten SR und SO berühren.

Zu diesen Kegeln hätten wir auch durch folgende Überlegung gelangen können. Ein Quintupel (X) und die beiden Geraden OS und RP z. B. als Polargeraden bestimmen ja eine Fläche 2. Grades. Wäre diese eine allgemeine, so würden wir durch eine ähnliche Betrachtung wie oben (§ 32) finden, dass die Flächen des Büschels $|OPSR|$ in sich selbst transformiert werden. Dann müsste aber $\lambda_{\omega\pi} = \lambda_{\varrho\sigma}$ sein, was nicht der Fall ist. Die Flächen sind daher ausgeartet, und zwar sind es die Kegel der beiden ersten Büschel, von denen man sich sofort überzeugt, dass sie SO und RP zu Polargeraden haben.

1) Vergl. A. Ameseder, a. z. a. O., S. 603.

T h e s e n.

1. Die synthetische Beweismethode in der Geometrie ist der analytischen vorzuziehen.

2. Es empfiehlt sich, bei geometrischen Untersuchungen für ein und dasselbe Resultat mehrere Beweise aufzusuchen.

3. Die lateinische Sprache ist zur Darstellung physikalischer Gegenstände weniger geeignet, als eine moderne Sprache.

4. Die geometrischen Leistungen der alten griechischen Mathematiker werden heutzutage in der Regel unterschätzt.

L e b e n s l a u f.

Unterzeichneter, katholischer Konfession, wurde zu Kaldenkirchen (Rheinland) am 7. Januar 1867 geboren. Mein Vater, Jos. Küppers, war Schenkwirt. Den ersten Unterricht in den höheren Lehrfächern erhielt ich auf der Knabenschule meiner Vaterstadt. Von hier aus erreichte ich die Secunda des Gymnasiums zu Kempen a. Rh., welches ich um Ostern 1885 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Darauf besuchte ich 8 Semester die Akademie zu Münster i. W., mit Unterbrechung des Sommersemesters 1886, in welchem ich der Universität zu Freiburg i. Br. angehörte. In Münster hörte ich die Vorlesungen der Herren Professoren Bachmann, Brefeld, Hagemann, Hittorf, Landois, Mügge, Salkowski, Sturm, in Freiburg die der Herren Professoren Lüroth und Stickelberger. In Münster war ich ausserdem 5 Semester Mitglied des mathematischen Seminars unter Leitung der Herren Professoren Bachmann und Sturm und nahm ein Semester an den praktischen physikalischen Übungen im Laboratorium des Herrn Prof. Hittorf teil.

Allen meinen verehrten Lehrern spreche ich meinen aufrichtigen Dank aus. Besonders danke ich Herrn Prof. Dr. Sturm für die Anleitung im mathematischen Seminar, sowie für die Anregungen, die er mir bei der Verfassung meiner Dissertation gab.

Heinrich Küppers.

Küppers, Heinrich

Kollineationen, durch welche fünf gegebene Punkte des Raumes in dieselben fünf Punkte transformiert werden Philos.-Inaug.-Diss. der K. Akademie Münster

Bonn 1890

Math.p. 489 q#Beibd.2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651617-5